BSN・TOP杯　第15回新潟県数学選手権　中学生大会
～STAY HOMEで数学に挑戦！～

注意事項

問題は １～４ までである。

他の人と相談するのは禁止とする。インターネットや本などで調べるのではなく，自分の力のみで問題を解く。

どのように考えて問題を解いたか，解答用紙に詳しく説明すること。最後の答えだけが合っていても，点数が低いことがある。問題によっては，解答の独創性や発想も採点の対象となることがある。

今回は，STAY HOMEでの挑戦のため，問題の難易度が高めに設定されています。よって，全部できなくて当たり前です。自分のできる範囲であきらめずに考え続けて，STAY HOMEでチャレンジしてください。

1 （24点）

正多面体は平面だけに囲まれた立体で，すべての面は合同な正多角形，どの頂点にも同じ数の面が集まっており，へこみがない。正多面体の面の数が n のとき，正 n 面体という。

(1) (ボーナス問題) 同封された展開図を使って，ハサミとセロハンテープで正 n 面体 (n=4,6,8,12,20) を完成させよ。(ボーナス問題のため解答用紙には解答不要。)

(2) 次の表を埋めよ。

	正 4 面体	**正 6 面体**	**正 8 面体**	**正 12 面体**	**正 20 面体**
面の形					
頂点の数					
辺の数					
面の数					

(3) 正 k 角形の 1 つの内角は $\boxed{?}$ 度であることから，正多面体の面の形は，正 3 角形，正 4 角形（正方形），正 5 角形のいずれかを示せ。

(4) 正多面体の面の形を正 k 角形，各頂点に集まる辺の本数を m とすれば，正 k 角形の 1 つの内角は $\boxed{?}$ 度であるから， $m \times \boxed{?} < 360$ がわかる。ここから，正多面体は，正 n 面体 (n=4,6,8,12,20) の 5 つしかないことを示せ。

(5) 正多面体の頂点の数を p，辺の数を q，面の数を r とすると $p - q + r = 2$ がわかる。これはオイラーの多面体定理と呼ばれる。さらに，面の形を正 k 角形，各頂点に集まる辺の本数を m とすれば， $mp = kr =$? となる。この等式とオイラーの多面体定理を使って，正多面体は，正 n 面体 (n=4,6,8,12,20) の 5 つしかないことを示せ。

2 （24点）

正 6 面体の各面に 1 から 6 までの数字が 1 回ずつ書かれているサイコロがある。各面は数字でもドットの数 ⚀ ⚁ ⚂ ⚃ ⚄ ⚅ でもよい。各面とその裏面を足した数は 7 である。これを｢いつものサイコロ｣とよぶ。以下では，いつものサイコロに加えて，次の（**条件**）をみたす｢へんてこサイコロ｣を考える：（**条件**）正 6 面体の各面に 1 から 6 までの数字（ドットの数）が書かれており，各面の数字（ドットの数）の和は 21 である。また，サイコロの各面は 1/6 の確率で出ると約束しておく。

(1) へんてこサイコロ A の各面の数字を小さい順に並べると (1,4,4,4,4,4)，へんてこサイコロ B の各面の数字を小さい順に並べると (2,2,2,5,5,5) とする。へんてこサイコロ A がへんてこサイコロ B に勝つ確率，負ける確率をそれぞれ求めよ。これより，へんてこサイコロ A とへんてこサイコロ B はどちらが有利か？ただし，勝つ確率が負ける確率より高いとき，有利という。

(2) へんてこサイコロ A とへんてこサイコロ B を前問 (1) と同じとする。次の条件をみたすへんてこサイコロ C は存在するか？へんてこサイコロ C はへんてこサイコロ B より有利であり，へんてこサイコロ A はへんてこサイコロ C より有利である。存在しない場合には，その理由を答えよ。

(3) 勝つ確率と負ける確率がともに 1/2 となる 2 つのへんてこサイコロ D と E を 1 組あげよ。ただし，D と E は各面の数字を小さい順に並べた並びが異なっているとする。

(4) いつものサイコロはどんなへんてこサイコロに対しても，勝つ確率と負ける確率が同じになる。これを示し，その確率を答えよ。

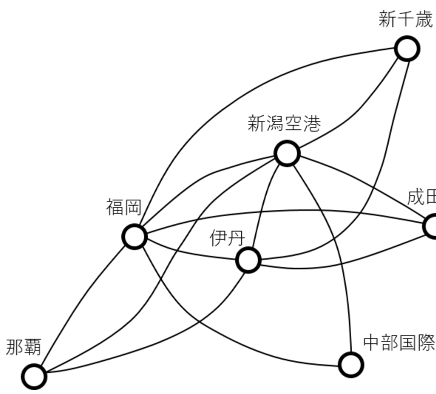
3 （24点）

(1) ある中学校の 3 年生は 99 人いる。このうち，誕生日が同じ月の生徒が 9 人以上いることを示せ。

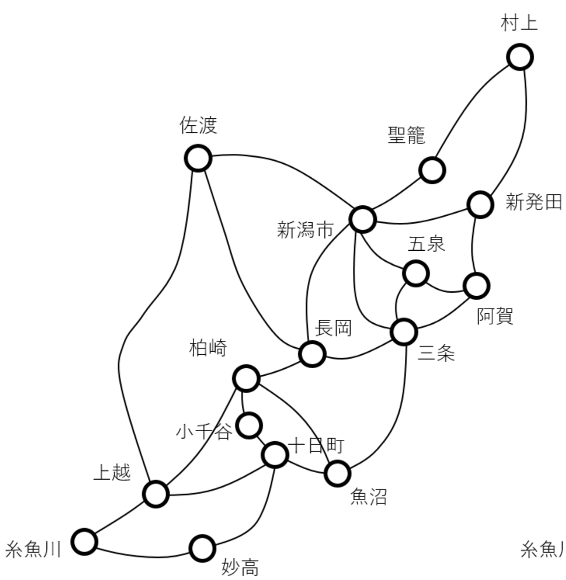
(2) 1 辺が 2 m の正 3 角形の土地に木を 9 本植える。互いの距離が 1 m 以下となる木が 3 本以上あることを示せ。

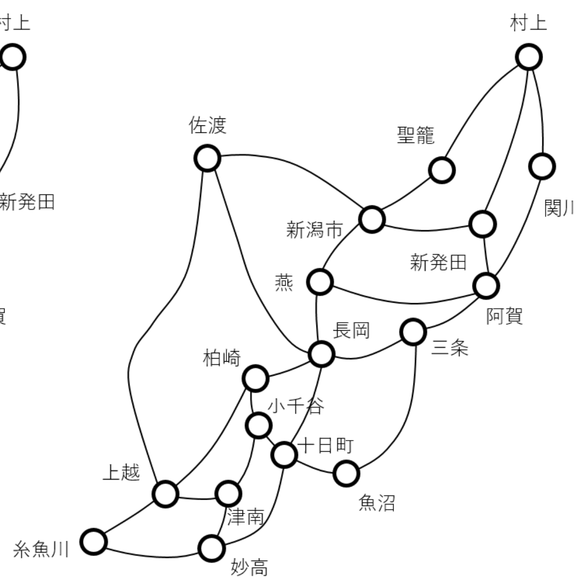
(3) 3 m×4 mの長方形の土地に木を 6 本植える。互いの距離が $\sqrt{5}$ m 以下となる 2 本の木があることを示せ。

(4) 下の図は空港の路線図である。各空港をちょうど一度だけ通り元の空港に戻ってくることはどの空港からスタートすればできるか？できない場合は，できないことを示せ。ただし，図にある線の上しか移動できないこととする。



(5) 下の左図と右図それぞれに対して，各市町村をちょうど一度だけ通り元の市町村に戻ってくることはどの市町村からスタートすればできるか？できない場合は，できないことを示せ。ただし，図にある線の上しか移動できないこととする。





(6) 前問 (5) の右図において，佐渡と村上，関川と魚沼，魚沼と糸魚川をさらに線で結ぶ (ヘリコプターで移動できることとする)。このとき何がおきるかを説明せよ。

4 （28点）

4 桁の整数 1089 は 9 倍すると 9801 となる。一番上の桁から順に読んだ数字の並びと，m 倍してから一番下の桁から順に読んだ数字の並びが同じになる整数を m 倍入れ替わり数という。1089 は 9 倍入れ替わり数の例である。ただし，n 桁の整数の一番上の桁が 0 だと数としては $n-1$ 桁以下となるため，m 倍入れ替わり数の一番上の桁は 0 ではないとあらかじめ約束する。

(1) 2 桁の 4 倍入れ替わり数はあるか？ある場合すべて求めよ。

(2) 3 桁の 4 倍入れ替わり数はあるか？ある場合すべて求めよ。

(3) 4 桁の 4 倍入れ替わり数はあるか？ある場合すべて求めよ。

(4) 5 桁の 4 倍入れ替わり数はあるか？ある場合すべて求めよ。

(5) 6 桁の 4 倍入れ替わり数はあるか？ある場合すべて求めよ。

(6) 7 桁の 4 倍入れ替わり数はあるか？ある場合すべて求めよ。

(7) 8 桁の 4 倍入れ替わり数はあるか？ある場合すべて求めよ。

(8) n 桁の 4 倍入れ替わり数はあるか？ある場合すべて求めよ。

(9) n 桁の 4 倍入れ替わり数は何種類あるか？さらには，n 桁の 4 倍入れ替わり数について成り立つ定理をできるだけ多く予想し，証明せよ。例えば，$2n+1$ 桁の 4 倍入れ替わり数の真ん中の数はいくつになるか？

BSN･TOP杯　第15回新潟県数学選手権　中学生大会

～STAY HOMEで数学に挑戦！～

解答編

1 (24点)

正多面体は平面だけに囲まれた立体で，すべての面は合同な正多角形，どの頂点にも同じ数の面が集まっており，へこみがない。正多面体の面の数が n のとき，正 n 面体という。

(1) (ボーナス問題) 同封された展開図を使って，ハサミとセロハンテープで正 n 面体 (n=4,6,8,12,20) を完成させよ。(ボーナス問題のため解答用紙には解答不要。)

(2) 次の表を埋めよ。

	正 4 面体	**正 6 面体**	**正 8 面体**	**正 12 面体**	**正 20 面体**
面の形	正 3 角形	正 4 角形	正 3 角形	正 5 角形	正 3 角形
頂点の数	4	8	6	20	12
辺の数	6	12	12	30	30
面の数	4	6	8	12	20

(3) 正 k 角形の 1 つの内角は$\boxed{?}$度であることから，正多面体の面の形は，正 3 角形，正 4 角形（正方形），正 5 角形のいずれかを示せ。

正多面体の面の形を正 k 角形とすると， k は 3 以上であり，

$\boxed{?}$ = 180 x (k - 2)/k

より，k = 6 のとき 120 度となる。しかし，各頂点には同じ数の面が集まっており，その面の数を m とすれば m は 3 以上である。各頂点に集まった面のそれぞれの内角の和は 360 度を越えることができない。よって， k は 5 以下である。

$\boxed{1}$ (つづき)

(4) 正多面体の面の形を正 k 角形，各頂点に集まる辺の本数を m とすれば，正 k 角形の 1 つの内角は $\boxed{?}$ 度であるから， m × $\boxed{?}$ < 360 がわかる。ここから，正多面体は，正 n 面体 (n=4,6,8,12,20) の 5 つしかないことを示せ。

$\boxed{?}$ = 180 x (k - 2)/k

より，(k - 2)(m - 2) < 4 をえる。m, k は3以上であるから，これをみたす整数 m, k は (m,k)=(3,3),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3)となる。これらは順に，正 n 面体 (n=4,6,8,12,20) である。

(5) 正多面体の頂点の数を p，辺の数を q，面の数を r とすると p − q + r = 2 がわかる。これはオイラーの多面体定理と呼ばれる。さらに，面の形を正 k 角形，各頂点に集まる辺の本数を m とすれば， mp = kr = ? となる。この等式とオイラーの多面体定理を使って，正多面体は，正 n 面体 (n=4,6,8,12,20) の 5 つしかないことを示せ。

? = 2 q

より， p − q + r = 2 に p = 2q/m, r = 2q/kを代入して， $\frac{1}{m}+\frac{1}{k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{q}$ (∗) をえる。

m, k は 3 以上であるから， $\frac{1}{2}+\frac{1}{q} \leqq \frac{2}{3}$ となり，q ≧ 6 がわかる。

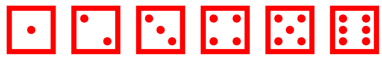
(i) m = k のとき，(∗)より， $\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$ なので 4 > m となり，m = k = 3 をえる。

(ii) m < k のとき，(∗)より， $\frac{2}{m}=\frac{1}{m}+\frac{1}{m}>\frac{1}{m}+\frac{1}{k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{q}>\frac{1}{2}$ なので，m < 4 より，m = 3 をえる。m = 3 を (∗)に代入して， $\frac{1}{3}+\frac{1}{k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{q}$ より， $\frac{1}{k}=\frac{1}{6}+\frac{1}{q}>\frac{1}{6}$ となり，k < 6 より，k = 4 ,5 をえる。

(iii) k < m のとき，(∗)より，(ii) と全く同じ計算をして，k = 3 と m < 6 より，m = 4 ,5 をえる。

以上の(i), (ii), (iii) より，(m,k) = (3,3),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3) をえる。このとき，(∗)より，q = 6, 12, 12, 30, 30 であり，これらは順に，正 n 面体 (n=4,6,8,12,20) である。

2 (24点)

正 6 面体の各面に 1 から 6 までの数字が 1 回ずつ書かれているサイコロがある。各面は数字でもドットの数  でもよい。各面とその裏面を足した数は 7 である。これを「いつものサイコロ」とよぶ。以下では，いつものサイコロに加えて，次の（**条件**）をみたす「へんてこサイコロ」を考える：（**条件**）正 6 面体の各面に 1 から 6 までの数字（ドットの数）が書かれており，各面の数字（ドットの数）の和は 21 である。また，サイコロの各面は 1/6 の確率で出ると約束しておく。

(1) へんてこサイコロ A の各面の数字を小さい順に並べると (1,4,4,4,4,4)，へんてこサイコロ B の各面の数字を小さい順に並べると (2,2,2,5,5,5) とする。へんてこサイコロ A がへんてこサイコロ B に勝つ確率，負ける確率をそれぞれ求めよ。これより，へんてこサイコロ A とへんてこサイコロ B はどちらが有利か？ただし，勝つ確率が負ける確率より高いとき，有利という。

へんてこサイコロ A が勝つ確率　$\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

へんてこサイコロ A が負ける確率　$\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$

へんてこサイコロ B はへんてこサイコロ A より有利である。

2 (つづき)

(2) へんてこサイコロ A とへんてこサイコロ B を前問 (1) と同じとする。次の条件をみたすへんてこサイコロ C は存在するか？へんてこサイコロ C はへんてこサイコロ B より有利であり，へんてこサイコロ A はへんてこサイコロ C より有利である。存在しない場合には，その理由を答えよ。

サイコロ C を (3,3,3,3,3,6) とする。このとき，

サイコロ C がサイコロ B に勝つ確率 (S) $\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$

サイコロ C がサイコロ B に負ける確率 (T) $\frac{15}{36}=\frac{5}{12}$

サイコロ C がサイコロ A に勝つ確率 (U) $\frac{11}{36}$

サイコロ C がサイコロ A に負ける確率 (V) $\frac{25}{36}$

となる。同様にして，サイコロ C として以下のようにもとれる。

サイコロ C を (3,3,3,3,4,5) とすれば，$S=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}>\frac{15}{36}=\frac{5}{12}=T$, $U=\frac{11}{36}<V=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

サイコロ C を (2,3,3,3,5,5) とすれば，$S=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}>\frac{12}{36}=\frac{1}{3}=T$, $U=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}<V=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

サイコロ C を (2,3,3,3,4,6) とすれば，$S=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}>\frac{15}{36}=\frac{5}{12}=T$, $U=\frac{11}{36}<V=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

サイコロ C を (2,2,3,3,5,6) とすれば，$S=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}>\frac{12}{36}=\frac{1}{3}=T$, $U=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}<V=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

サイコロ C を (1,3,3,3,5,6) とすれば，$S=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}>\frac{15}{36}=\frac{5}{12}=T$, $U=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}<V=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

サイコロ C を (2,2,2,3,6,6) とすれば，$S=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}>\frac{12}{36}=\frac{1}{3}=T$, $U=\frac{16}{36}=\frac{4}{9}<V=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

サイコロ C を (1,2,3,3,6,6) とすれば，$S=\frac{18}{36}=\frac{1}{2}>\frac{15}{36}=\frac{5}{12}=T$, $U=\frac{15}{36}=\frac{5}{12}<V=\frac{20}{36}=\frac{5}{9}$

(3) 勝つ確率と負ける確率がともに 1/2 となる 2 つのへんてこサイコロ D と E を 1 組あげよ。ただし，D と E は各面の数字を小さい順に並べた並びが異なっているとする。

たとえば，(1,1,1,6,6,6), (2,2,2,5,5,5), (3,3,3,4,4,4) はどの 2 つをとっても，勝つ確率と負ける確率は 1/2 である。このほか，

(1,1,1,6,6,6) の相手方として (2,3,4,4,4,4), (3,3,3,3,4,5), (2,3,3,4,4,5), (2,2,4,4,4,5), (2,3,3,3,5,5), (2,2,3,4,5,5)

(2,2,2,5,5,5) の相手方として (1,3,3,4,4,6), (1,1,3,4,6,6)

(3,3,3,4,4,4) の相手方として (1,2,2,5,5,6), (1,1,2,5,6,6)

としてもよい。

2 (つづき)

(4) いつものサイコロはどんなへんてこサイコロに対しても，勝つ確率と負ける確率が同じになる。これを示し，その確率を答えよ。

どんなへんてこサイコロに対しても，数字（ドットの数）k の出る確率を p(k) とすれば，

P(1) + p(2) + p(3) + p(4) + p(5) + p(6) = 1

p(1) + 2 p(2) + 3 p(3) + 4 p(4) + 5 p(5) + 6 p(6) = $\frac{21}{6}$

である。このへんてこサイコロがいつものサイコロに勝つ確率，負ける確率を求める。へんてこサイコロで数字（ドットの数）k がでたとき，いつものサイコロに勝つ確率，負ける確率は (k - 1)/6, (6 – k)/6 である。よって、へんてこサイコロがいつものサイコロに勝つ確率は，k = 1, 2, ,3, 4, 5, 6 がでたときの勝つ確率を足して，

$p(1)\,\frac{0}{6} + p(2)\,\frac{1}{6} + p(3)\,\frac{2}{6} + p(4)\,\frac{3}{6} + p(5)\,\frac{4}{6} + p(6)\,\frac{5}{6}$

$= \frac{1}{6}$ ((p(1) + 2 p(2) + 3 p(3) + 4 p(4) + 5 p(5) + 6 p(6)) – (p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)))

$= \frac{1}{6}\left(\frac{21}{6} - 1\right) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

である。同様にして，へんてこサイコロがいつものサイコロに負ける確率は，k = 1, 2, ,3, 4, 5, 6 がでたときの負ける確率を足して，

$p(1)\,\frac{5}{6} + p(2)\,\frac{4}{6} + p(3)\,\frac{3}{6} + p(4)\,\frac{2}{6} + p(5)\,\frac{1}{6} + p(6)\,\frac{0}{6}$

$= \frac{1}{6}$(6 ((p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)) – (p(1) + 2 p(2) + 3 p(3) + 4 p(4) + 5 p(5) + 6 p(6)))

$= \frac{1}{6}\left(6 - \frac{21}{6}\right) = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

となる。

以上より，いつものサイコロはどんなへんてこサイコロに対しても，勝つ確率と負ける確率が $\frac{5}{12}$ となる。(ちなみに，引き分けとなる確率が $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ である。)

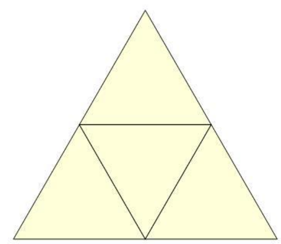
3 (24点)

(1) ある中学校の 3 年生は 99 人いる。このうち，誕生日が同じ月の生徒が 9 人以上いることを示せ。

「n > m のとき，n 羽の鳩が m 個の巣に入ろうとすると，必ず 2 羽以上の鳩が同じ巣に入る。」これは，鳩の巣原理またはディリクレの部屋割り論法と呼ばれている。

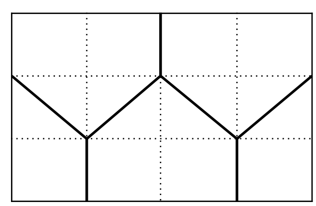
1 月から 12月を鳩の巣と思い，生徒を鳩だと考えることにする。96人であれば 96 = 8 x 12 であるから，なんとか全ての月に 8 人ずつの生徒を入れることができる。しかし，鳩の巣原理 (の考え方) によって，97人以上の生徒がいれば，必ずどこかの月は 9 人以上の生徒が入ってしまう。しかし，実際にどの月に 9 人以上の生徒が入っているかは分からない。

(2) 1 辺が 2 m の正 3 角形の土地に木を 9 本植える。互いの距離が 1 m 以下となる木が 3 本以上あることを示せ。



どのように植えても，互いの距離が距離が 1 m 以下となる木が 3 本以上あることを示す必要がある。正 4 面体の展開図のように，1 辺が 1 m の正 3 角形の 4 つの土地に分割する。
9 = 2 x 4 + 1 であるから，鳩の巣原理から，
4 つの土地のうちの 1 つには 3 本の木が植えられる。
分けたあとの小さい土地の中は距離が 1 m 以下となる。

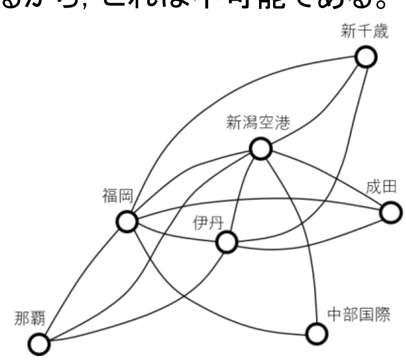
(3) 3 m × 4 mの長方形の土地に木を 6 本植える。互いの距離が $\sqrt{5}$ m 以下となる 2 本の木があることを示せ。



3 m × 4 mの長方形の土地を少し工夫して，
右図のように 5 つに分ける。鳩の巣原理から，
4 つの土地のうちの 1 つには 2 本の木が植えられる。
分けたあとの小さい土地の中は距離が $\sqrt{5}$ m 以下となる。

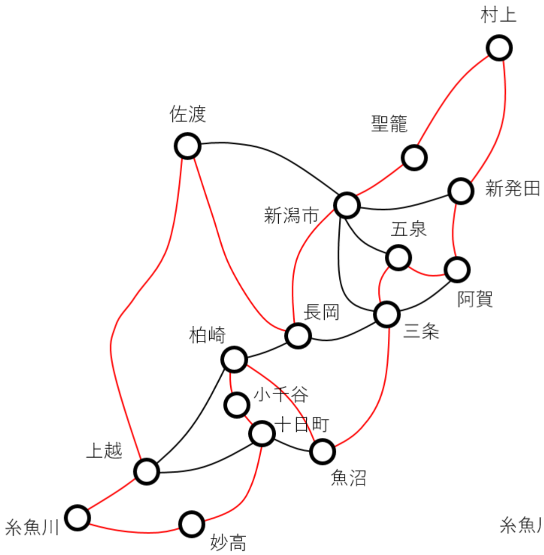
(4) 下の図は空港の路線図である。各空港をちょうど一度だけ通り元の空港に戻ってくることはどの空港からスタートすればできるか？できない場合は，できないことを示せ。ただし，図にある線の上しか移動できないこととする。

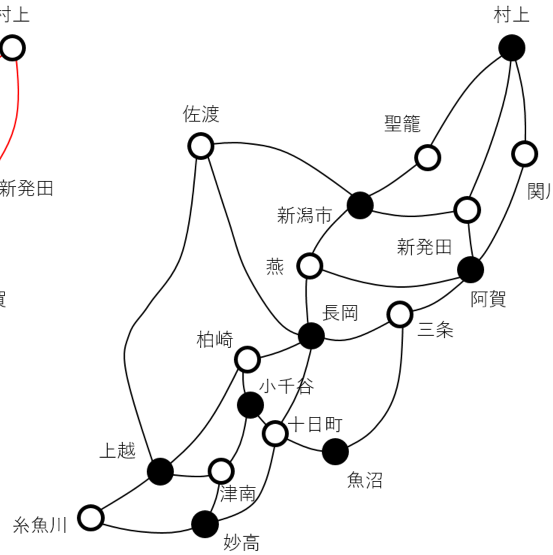
「新潟空港」「伊丹」「福岡」と「新千歳」「成田」「中部国際」「那覇」の2つのグループに分ける。後半の「新千歳」「成田」「中部国際」「那覇」は前半の「新潟空港」「伊丹」「福岡」のうちのいずれかを経由しないとほかの空港にはたどり着けない。しかし，前半の空港は3つ後半の空港は 4 つであるから，これは不可能である。



3 (つづき)

(5) 下の左図と右図それぞれに対して，各市町村をちょうど一度だけ通り元の市町村に戻ってくることはどの市町村からスタートすればできるか？できない場合は，できないことを示せ。ただし，図にある線の上しか移動できないこととする。



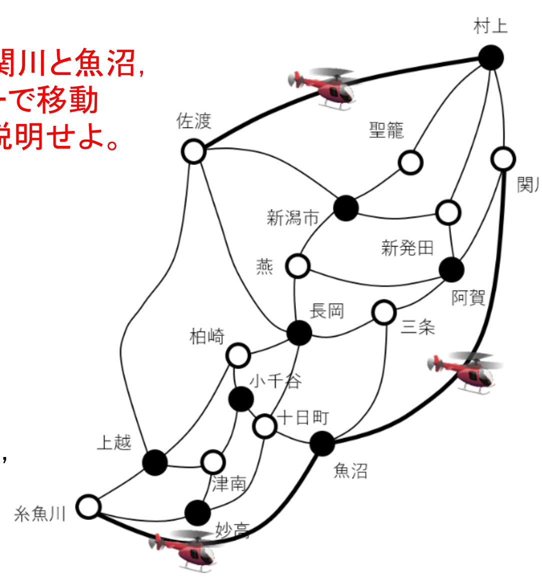


左図は赤線のようにすれば，どの市町村からスタートしても元の市町村に戻ってこれる。実は，各市町村をちょうど一度だけ通り元の市町村に戻ってくる経路はこの赤線以外には存在しない。

右図はスタートの各市町村ごとに場合分けしてもよいが，白と黒に塗り分けてみると，白のとなりは黒，黒のとなりは白である。よって，白と黒を交互に各市町村をまわることになる。しかし，白は 10 個，黒は 8 個であるから，これは不可能である。

[別解] 右図は聖籠を通らなくてはいけないため，聖籠と新潟市の間および聖籠と村上の間を必ず通るが，村上から関川に行っても新発田に行っても阿賀に出るしかなく，関川か新発田のどちらかには行けなくなる。

(6) 前問 (5) の右図において，佐渡と村上，関川と魚沼，魚沼と糸魚川をさらに線で結ぶ(ヘリコプターで移動できることとする)。このとき何がおきるかを説明せよ。



右図のようにヘリコプターを導入しても，状況は前問 (5) と変わらない。すなわち，白のとなりは黒，黒のとなりは白である。よって，白と黒を交互に各市町村をまわることになる。しかし，白は 10 個，黒は 8 個であるから，これは不可能である。

ちなみに，グラフ理論という数学の分野では，このように白と黒に塗り分けられるとき 2 部グラフと呼ばれ，研究されている。

4 (28点)

4 桁の整数 1089 は 9 倍すると 9801 となる。一番上の桁から順に読んだ数字の並びと, m 倍してから一番下の桁から順に読んだ数字の並びが同じになる整数を m 倍入れ替わり数という。1089 は 9 倍入れ替わり数の例である。ただし, n 桁の整数の一番上の桁が 0 だと数としては n − 1 桁以下となるため, m 倍入れ替わり数の一番上の桁は 0 ではないとあらかじめ約束する。

以下、a, b, c, ･･･ を 0 から 9 の整数とする。ただし、a は 0 ではないとする。

(1) 2 桁の 4 倍入れ替わり数はあるか？ある場合すべて求めよ。

4 倍入れ替わり数は, $4(10a + b) = 10b + a$ (★) をみたす。これを整理して, $39a = 6b$ をえる。a は 4 倍して繰り上がりできないため, $a = 1$ または 2 となる。(★)より a は偶数で, $a = 2$ をえる。(★)に $a = 2$ を代入して, $b = 13$ であるが, これは不可能である。

<u>答　2 桁の 4 倍入れ替わり数はない。</u>

[別解] (★)の両辺に $10a + b$ を足せば, $5(10a + b) = 11(a + b)$ をえる。これより, $10a + b$ は 11 の倍数で, $a = b$ をえるが, (★)より, これは不可能である。

(2) 3 桁の 4 倍入れ替わり数はあるか？ある場合すべて求めよ。

4 倍入れ替わり数は, $4(100a + 10b + c) = 100c + 10b + a$ (★) をみたす。整理して,

$(400 - 1)a + 10(4 - 1)b + (4 - 100)c = 0$ (☆) をえる。

a は 4 倍して繰り上がりできないため, $a = 1$ または 2 となる。(★)より a は偶数で, $a = 2$ をえる。0 ～ 3 の繰り上がりを考えると, (★)の右辺より c は 8 または 9 であるが, 4 c の一の位は $a = 2$ とならなくてはならないため $c = 8$ をえる。(☆)に $a = 2, c = 8$ を代入し, $30(b + 1) = 0$ から, $b = -1$ であるが, これは不可能である。

<u>答　3 桁の 4 倍入れ替わり数はない。</u>

[別解] $a = 2, c = 8$ のあと, (★)から $10b + a = 10b + 2$ が 4 の倍数であることから, b は奇数となる。4 b は繰り上がりできないため, $b = 1$ であるが, これは不可能である。

(3) 4 桁の 4 倍入れ替わり数はあるか？ある場合すべて求めよ。

4 倍入れ替わり数は, $4(1000a + 100b + 10c + d) = 1000d + 100c + 10b + a$ (★) をみたす。これを整理して,

$(4000 - 1)a + 10(40 - 1)b + 10(4 - 10)c + (4 - 1000)d = 0$ (☆) をえる。

(2)と同様, $a = 2, d = 8$ となり, (☆)に代入して, $30(13b - 2c + 1) = 0$ をえる。ここから, b は奇数がわかる。(★)の左辺から, b は 4 倍して繰り上がりできないため, $b = 0, 1, 2$ しか可能性がなく, 奇数より $b = 1$ をえる。$13b - 2c + 1 = 0$ に $b = 1$ を代入して, $c = 7$ をえる。実際, 2178 は 4 倍入れ替わり数。

<u>答　4 桁の 4 倍入れ替わり数は, 2178 のみ。</u>

[別解] (2)の別解同様, $a = 2, d = 8$ となり, (★)から $10b + a = 10b + 2$ が 4 の倍数であることから, b は奇数となる。4 b は繰り上がりできないため, $b = 1$ をえる。このとき, (★)から c は $4b = 4$ に 0 ～ 3 の繰り上がりを考えた 4 ～7 であり, 4, 5, 6 は不適より, $c = 7$ をえる。

4 （つづき）

(4) 5 桁の 4 倍入れ替わり数はあるか？ある場合すべて求めよ。

4 倍入れ替わり数は，4 (10000 a + 1000 b + 100 c + 10 d + e) = 10000 e + 1000 d + 100 c + 10 b + a (★) をみたす。これを整理して，

(40000 - 1) a + 10 (400 - 1) b + 100 (4 - 1) c + 10 (4 - 100) d + (4 - 10000) e = 0 (☆) をえる。

(2)と同様，a = 2, e = 8 となり，(☆)に代入して，30 (133 b + 10 c - 32 d + 1) = 0 をえる。ここから，b は奇数がわかる。(★)の左辺から，b は 4 倍して繰り上がりできないため，b = 0, 1, 2 しか可能性がなく，奇数より b = 1 をえる。この式に b = 1 を代入して，2 (5 c - 16 d + 67) = 0 をえる。ここで，4 d と 4 e = 32 からの繰り上がりの 3 を足した 4 d + 3 の一の位は b = 1 より，d = 2, 7 しか可能性はない(下の表を参照)。(★)から d は4 b = 4 以上なので，d = 7 となる。

d	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
4 d + 3 の一の位	3	7	1	5	9	3	7	1	5	9

d = 7 を 5 c - 16 d + 67 = 0 に代入して，c = 9 をえる。実際，21978 は 4 倍入れ替わり数。

答　5 桁の 4 倍入れ替わり数は，21978 のみ。

[別解] (3)の別解同様 a = 2, e = 8, b = 1 となり，(★)から d は 4 b = 4 に 0 ～ 3 の繰り上がりを足した 4 ～ 7 であり，4 d と 4 e = 32 からの繰り上がりの 3 を足した 4 d + 3 の一の位は b = 1 とならなくてはいけないから，d = 7 となる。c は 4 c と 4×78 からの繰り上がりの 3 を足した 4 c + 3 の一の位となるため，c = 9 となるしかない。

(5) 6 桁の 4 倍入れ替わり数はあるか？ある場合すべて求めよ。

4 倍入れ替わり数は，4 (100000 a + 10000 b + 1000 c + 100 d + 10 e + f) = 100000 f + 10000 e + 1000 d + 100 c + 10 b + a (★) をみたす。これを整理して，

(400000 - 1) a + 10 (4000 - 1) b + 100 (40 - 1) c + 100 (4 - 10) d + 10 (4 - 1000) e + (4 - 100000) f = 0 (☆) をえる。

(2)と同様，a = 2, f = 8 となり，(☆)に代入して，30 (1333 b + 130 c - 20 d -332 e + 1) = 0 をえる。ここから，b は奇数がわかる。(★)の左辺から，b は 4 倍して繰り上がりできないため，b = 0, 1, 2 しか可能性がなく，奇数より b = 1 をえる。この式に b = 1 を代入して，2 (65 c - 10 d - 166 e + 667) = 0 をえる。ここで，4 e と 4 f = 32 からの繰り上がりの 3 を足した 4 e + 3 の一の位は b = 1 より，e = 2, 7 しか可能性はない。しかし，e は 4 b = 4 と4 倍したときに発生する繰り上がり 0 ～ 3 を足したものだから，e = 2 は不可能で，e = 7 をえる。e = 7 を 65 c - 10 d - 166 e + 667 = 0 に代入して，5 (13 c - 2 d - 99) = 0 をえる。

ここから，c は奇数であり，c = $\frac{2d+99}{13} \geqq \frac{99}{13} = 7.6\cdots$ より，c = 9 となり，

13 c - 2 d - 99 = 0 に代入して，d = 9 をえる。実際，219978 は 4 倍入れ替わり数。

答　6 桁の 4 倍入れ替わり数は，219978 のみ。

[別解] (4)の別解同様 a = 2, f = 8, b = 1, e = 7 となり，c は4倍したときの繰り上がりと 4 b = 4 を足して e = 7 となるため，3 繰り上がるために，c = 7, 8, 9 のいずれかで，4 d + 3 の一の位でもあるため，c = 7, 9 のどちらか。4 d + 3 の一の位が c = 7, 9 となるのは，それぞれ，d = 1, 6 と d = 4, 9 であるが，題意をみたすのは，c = 9, d = 9 のみ。

4 （つづき）

(6) 7 桁の 4 倍入れ替わり数はあるか？ある場合すべて求めよ。

4 倍入れ替わり数は，$4(1000000a + 100000b + 10000c + 1000d + 100e + 10f + g) = 1000000g + 100000f + 10000e + 1000d + 100c + 10b + a$ (★) をみたす。整理して，

$(4000000 - 1)a + 10(40000 - 1)b + 100(400 - 1)c + 1000(4 - 1)d + 100(4 - 100)e + 10(4 - 10000)f + (4 - 1000000)g = 0$ (☆) をえる。

(2)と同様，$a = 2, g = 8$ となり，(☆)に代入して，$30(13333b + 1330c + 100d - 320e - 3332f + 1) = 0$ をえる。ここから，b は奇数がわかる。(★)の左辺から，b は 4 倍して繰り上がりできないため，$b = 0, 1, 2$ しか可能性がなく，奇数より $b = 1$ をえる。この式に $b = 1$ を代入して，$1330c + 100d - 320e - 3332f + 13334 = 0$ をえる。ここで，4 f と $4g = 32$ からの繰り上がりの 3 を足した $4f + 3$ の一の位は $b = 1$ とならなくてはいけないから，$f = 2, 7$ しか可能性がない。しかし，$f = 2$ は不可能である。なぜなら，f は $4b = 4$ と4 倍したときに発生する繰り上がり 0 〜 3 を足したものだからである。よって，$f = 7$ しか可能性はない。$f = 7$ を $1330c + 100d - 320e - 3332f + 13334 = 0$ に代入すれば，$10(133c + 10d - 32e - 999) = 0$ をえる。ここから，c は奇数であるが，$c = 1, 3, 5$ は不可能である。なぜなら，$4b = 4$ に 4 c の繰り上がりを足したものが $b = 7$ である。残りの $c = 7, 9$ を $133c + 10d - 32e - 999 = 0$ に代入して，$2(5d - 16e - 34) = 0$, $2(5d - 16e + 99) = 0$ をえる。

(i) $c = 7$ のとき，$4c = 28$ に繰り上がりを加味して 30 または 31 の一の桁 0, 1 が e となる。これを $5d - 16e - 34 = 0$ に代入して，d が求まるが，d は 0 〜 9 の整数なのでこれは不可能である。

(ii) $c = 9$ のとき，e は $4c = 36$ の一の位 6 に下の桁からの繰り上がり 0 〜 3 を足したものだから，$e = 6, 7, 8, 9$ のいずれかである。これを $5d - 16e + 99 = 0$ に代入すると，d が 0 〜 9 の整数となるのは，$e = 9$ のとき，$d = 9$ のみ。実際，2199978 は 4 倍入れ替わり数である。

<u>答　7 桁の 4 倍入れ替わり数は，2199978 のみ。</u>

[別解] (5)の別解同様 $a = 2, g = 8, b = 1, f = 7$ となり，$c = 7$ のとき，$e = 1, 6$ と $c = 9$ のとき，$e = 4, 9$ となる。それぞれ，d を 0 〜 9 まで動かして解をさがしてみると，題意をみたすのは，$c = 9, d = 9, e = 9$ のみ。

4 （つづき）

(7) 8 桁の 4 倍入れ替わり数はあるか？ある場合すべて求めよ。

4 倍入れ替わり数は，$4 (10000000 a + 1000000 b + 100000 c + 10000 d + 1000 e + 100 f + 10 g + h) = 10000000 h + 1000000 g + 100000 f + 10000 e + 1000 d + 100 c + 10 b + a$ (★) をみたす。これを整理して，

$(40000000 - 1) a + 10 (400000 - 1) b + 100 (4000 - 1) c + 1000 (40 - 1) d + 1000 (4 - 10) e + 100 (4 - 1000) f +10 (4 - 100000) g + (4 - 10000000) h = 0$ (☆) をえる。

(2)と同様，$a = 2, h = 8$ となり，(☆)に代入して，$30 (133333 b + 13330 c + 1300 d -200 e - 3320 f - 33332 g + 1) = 0$ をえる。ここから，b は奇数がわかる。(★)の左辺から，b は 4 倍して繰り上がりできないため，$b = 0, 1, 2$ しか可能性がなく，奇数より $b = 1$ をえる。この式に $b = 1$ を代入して，$13330 c + 1300 d - 200 e - 3320 f - 33332 g + 133334 = 0$ をえる。ここで，$4 g$ と $4 h = 32$ からの繰り上がりの 3 を足した $4 g + 3$ の一の位は $b = 1$ とならなくてはいけないから，$g = 2, 7$ しか可能性がない。しかし，$g = 2$ は不可能である。なぜなら，g は $4 b = 4$ と4 倍したときに発生する繰り上がり 0 〜 3 を足したものだからである。よって，$g = 7$ しか可能性はない。$g = 7$ を $13330 c + 1300 d - 200 e - 3320 f - 33332 g + 133334 = 0$ に代入すれば，$10 (1333 c + 130 d - 20 e - 332 f - 9999) = 0$ をえる。ここから c は奇数であるが，$c = 1, 3, 5$ は不可能である。なぜなら，$4 b = 4$ に $4 c$ の繰り上がりを足したものが $b = 7$ である。残りの $c = 7, 9$ を $1333 c + 130 d - 20 e - 332 f - 9999 = 0$ に代入して，$2 (65 d - 10 e - 166 f - 334) = 0$, $2 (65 d - 10 e - 166 f + 999) = 0$ をえる。

(i) $c = 7$ のとき，$4 c = 28$ に繰り上がりを加味して 30 または 31 の一の桁 0, 1 が f となる。$65 d - 10 e - 166 f - 334 = 0$ に $f = 0$ を代入すると，$65 d - 10 e - 334 = 0$ であるが，$65 d - 10 e$ は 5 の倍数であることから，これをみたす解 d, e は存在しない。$65 d - 10 e - 166 f - 334 = 0$ に $f = 1$ を代入すると，$5 (13 d - 2 e - 100) = 0$ をえる。d, e は 0 〜 9 の整数であるから，これをみたす d, e をさがすと，$d = 8, e = 2$ のみであることがわかる。

(ii) $c = 9$ のとき，f は $4 c = 36$ の一の位 6 に下の桁からの繰り上がり 0 〜 3 を足したものだから，$f = 6, 7, 8, 9$ のいずれかである。これを $65 d - 10 e - 166 f + 999 = 0$ に代入すると，$65 d - 10 e + 3 = 0$, $65 d - 10 e - 163 = 0$, $65 d - 10 e - 329 = 0$, $65 d - 10 e - 495 = 0$ をえる。d, e は 0 〜 9 の整数であるから，これをみたす d, e をさがすと，$d = 9, e = 9$ のみであることがわかる。

答　8 桁の 4 倍入れ替わり数は，21782178, 21999978 の 2 種類ある。

[別解] (6)の別解同様 $a = 2, h = 8, b = 1, g = 7$ となり，$c = 7$ のとき，$f = 1, 6$ と $c = 9$ のとき，$f = 4, 9$ となる。それぞれ，d, e を 0 〜 9 まで動かして解をさがしてみると，題意をみたすのは，$c = 7, d = 8, e = 2, f = 1$ と $c = 9, d = 9, e = 9, f = 9$ の 2 種類がえられる。

4（つづき）

(8) n 桁の 4 倍入れ替わり数はあるか？ある場合すべて求めよ。

前問 (7) までをふまえると，n が 4 以上のとき，例えば，

219・・・978 (・・・は n 桁になるまで 9 を続ける)

は 4 倍入れ替わり数である。

それ以外にも，例えば，n が 8 桁以上では

21780・・・02178 (・・・は n 桁になるまで 0 を続ける)，n が 4 の倍数のとき，

2178・・・2178 (・・・は 2178 をくり返し続ける)　なども 4 倍入れ替わり数となる。

<u>答　n 桁の 4 倍入れ替わり数は，n が 4 以上で存在する。</u> **(すべて求めるのは以下参照。)**

(9) n 桁の 4 倍入れ替わり数は何種類あるか？さらには，n 桁の 4 倍入れ替わり数について成り立つ定理をできるだけ多く予想し，証明せよ。例えば，2n + 1 桁の 4 倍入れ替わり数の真ん中の数はいくつになるか？

前問 (3) から (7) を参考に考えていく。ポイントは n 桁の 4 倍入れ替わり数の各桁がとりうる値の可能性を左右の両端から決定していくこと。また，4 倍したときの各桁の繰り上がりをコントロールすることにある。n 桁の4 倍入れ替わり数の左から k 桁目を s, 右から k 桁目を t とする。

$$4 \times \overbrace{\cdots\ s}^{k}\ \cdots\ \overbrace{t\ \cdots}^{k} = \cdots\ t\ \cdots\ s\ \cdots$$

c1　c2　　d2　d1

4 倍したときの左から k 桁目から左から k - 1 桁目への繰り上がりを c1 (0から3)
4 倍したときの左から k + 1 桁目から左から k 桁目への繰り上がりを c2 (0から3)
4 倍したときの右から k 桁目から右からから k + 1 桁目への繰り上がりを d2 (0から3)
4 倍したときの右から k - 1 桁目から右から k 桁目への繰り上がりを d1 (0から3)

とおく。4 倍入れ替わり数であるから，

$$\begin{cases} s = 4t + d1 - 10\,d2 & \cdots (A) \\ t = 4s + c2 - 10\,c1 & \cdots (B) \end{cases}$$

をみたす。これは，c1, c2, d1, d2 を固定したとき，s と t に関する連立方程式とみなせる。
(A) から (B) をひくと，s - t = 4 t - 4 s + d1 - c2 - 10 d2 + 10 c1 で，d1 - c2 は 5 の倍数となる。
しかし，d1, c2 は 0 ～ 3 までの整数なので，d1 = c2 となる。・・・(C)

4 （つづき）

(i) $k = 1$ のとき，すなわち，一番左端と一番右端を考える。一番左の桁は 4 倍して繰り上がりできないため，$c1 = 0$ である。一番右の桁は 4 倍してさらに右の桁から繰り上がりすることはないため，$d1 = 0$ で$(c1,d1) = (0,0)$ をえる。(C) より，$c2 = 0$ もわかる。いま

$$\begin{cases} s = 4t - 10\,d2 & \cdots (A) \\ t = 4s & \cdots (B) \end{cases}$$

であるから，$15s = 10\,d2$ となり，s は 0 〜 9 の整数，$d2$ は0, 1, 2, 3 のどれかであるので，$d2 = 0$ または $d2 = 3$ より，$(c2,d2) = (0,0), (0,3)$ となる。

$k = 1$ のとき，s は 0 ではなく，$(s,t) = (1,4), (2,8)$ の可能性しかなく，$d2 = 0$ は不可能なので，$(c2,d2) = (0,3)$ であり，(A), (B) から $(s,t) = (2,8)$となる。

(ii) $k > 1$ かつ $(c1,d1) = (0,0)$ のとき，上の (i) と同じ議論から，$(c2,d2) = (0,0), (0,3)$ をえる。

$(c2,d2) = (0,0)$ のとき，(A), (B) から $(s,t) = (0,0)$ となる。
$(c2,d2) = (0,3)$ のとき，(A), (B) から $(s,t) = (2,8)$ となる。

あとは，残りの $k > 1$ かつ $(c1,d1) = (0,3)$ のときを調べる。

(iii) $k >1$ かつ $(c1,d1) = (0,3)$ のとき，(C) より，$c2 = 3$ となる。

$$\begin{cases} s = 4t + 3 - 10\,d2 & \cdots (A) \\ t = 4s + 3 & \cdots (B) \end{cases}$$

より，$15s + 15 = 10\,d2$ をえる。s は 0 〜 9 の整数，$d2$ は0, 1, 2, 3 のどれかであるので，$d2 = 3$ より，$(c2,d2) = (3,3)$ となり，(A), (B) から $(s,t) = (1,7)$ をえる。

(iv) $k > 1$ かつ $(c1,d1) = (3,3)$ のとき，(C) より，$c2 = 3$ であり，

$$\begin{cases} s = 4t + 3 - 10\,d2 & \cdots (A) \\ t = 4s - 27 & \cdots (B) \end{cases}$$

より，$15(s - 7) = 10\,d2$ をえる。s は 0 〜 9 の整数，$d2$ は0, 1, 2, 3 のどれかであるので，$d2 = 0$ または $d2 = 3$ となる。
$(c2,d2) = (3,0)$ のとき，(A), (B) から $(s,t) = (7,1)$となる。
$(c2,d2) = (3,3)$ のとき，(A), (B) から $(s,t) = (9,9)$ となる。

(v) $k > 1$ かつ $(c1,d1) = (3,0)$ のとき，(C) より，$c2 = 0$ であり，

$$\begin{cases} s = 4t - 10\,d2 & \cdots (A) \\ t = 4s - 30 & \cdots (B) \end{cases}$$

より，$15(s - 8) = 10\,d2$ をえる。s は 0 〜 9 の整数，$d2$ は0, 1, 2, 3 のどれかであるので，$d2 = 0$ をえる。よって，$(c2,d2) = (0,0)$ となり，(A), (B) から $(s,t) = (8,2)$ をえる。

以上の (i)〜(v) より，(i) の $k = 1$ からはじまって左右の両端から真ん中に向かって，(ii)〜(v) をくり返して進んでいくしかないことがわかる。

4 （つづき）

まとめると，

$$(c1,d1) \xrightarrow{(s,t)} (c2,d2)$$

のように矢印をもちいてあらわせば，(i) k = 1 の左右の両端 (s,t) = (2,8) からスタートして，真ん中に向かって以下の，(ii)～(v)をくり返して進んでいくしかない。

(i) k = 1 のとき，

$$(0,0) \xrightarrow{(2,8)} (0,3)$$

(ii) k > 1 かつ (c1,d1) = (0,0) のとき，

$$(0,0) \xrightarrow{(2,8)} (0,3) \quad \text{または} \quad (0,0) \xrightarrow{(0,0)} (0,0)$$

(iii) k >1 かつ (c1,d1) = (0,3) のとき，

$$(0,3) \xrightarrow{(1,7)} (3,3)$$

(iv) k > 1 かつ (c1,d1) = (3,3) のとき，

$$(3,3) \xrightarrow{(7,1)} (3,0) \quad \text{または} \quad (3,3) \xrightarrow{(9,9)} (3,3)$$

(v) k > 1 かつ (c1,d1) = (3,0) のとき，

$$(3,0) \xrightarrow{(8,2)} (0,0)$$

特に，奇数 2n + 1 桁の場合，左から n + 1 桁と右から n + 1 桁は真ん中で一致し， s = t となる。これにより，(c2,d2) = (d1,c1) であるから， (0,0) または (3,3) で，それぞれ真ん中の桁は 0 または 9 となる。これは，左右の両端からスタートして，真ん中をのぞいた 偶数 2n 桁の 4 倍入れ替わり数の真ん中に 0 または 9 を入れたものである。すなわち，2n + 1 桁の 4 倍入れ替わり数と 2n 桁の 4 倍入れ替わり数は同じ数だけある。上の議論から，2n 桁の 4 倍入れ替わり数の真ん中の2桁は82, 17, 00, 99 となるしかない。これらの真ん中に 1 桁いれると，802, 197, 000, 999 となる。

4 （つづき）

2n 桁の 4 倍入れ替わり数が何種類あるか考える。

2n 桁の 4 倍入れ替わり数の種類をは 2n - 4 桁の 4 倍入れ替わり数の種類と 2n - 2 桁の 4 倍入れ替わり数の種類を足したものになる。

実際，2n 桁の 4 倍入れ替わり数の真ん中は 7821, 2178, 00, 99 がくるしかない。このとき，7821, 2178 を取り除くと 2n - 4 桁の 4 倍入れ替わり数，00, 99 を取り除くと 2n - 2 桁の 4 倍入れ替わり数がえられる。

逆に，2n - 2 桁の 4 倍入れ替わり数の真ん中もまた 7821, 2178, 00, 99 であるから，それぞれの真ん中に 2桁の 00, 99, 00, 99 を入れて， 780021, 219978, 0000, 9999 とすれば，2n 桁の 4 倍入れ替わり数がえられる。同様にして，2n - 4桁の 4 倍入れ替わり数の真ん中もまた 7821, 2178, 00, 99 であるから，それぞれの真ん中に 4桁の 2178, 7821, 2178, 7821 を入れて， 78217821, 21782178, 021780, 978219 とすれば，2n 桁の 4 倍入れ替わり数がえられる。

すなわち，2n 桁の 4 倍入れ替わり数と 2n - 2 桁，2n - 4 桁の 4 倍入れ替わり数には1対1対応があり，同じ数の種類だけある。

<u>答　2n 桁と 2n + 1 桁の 4 倍入れ替わり数は，n - 1 番目のフィボナッチ数だけある。</u>

4 （つづき）

4 桁 2178 (1種類)

5 桁 21978 (1種類)

6 桁 219978 (1種類)

7 桁 2199978 (1種類)

8 桁 21782178, 21999978 (2種類)

9 桁 217802178, 219999978 (2種類)

10 桁 2178002178, 2197821978, 2199999978 (3種類)

11 桁 21780002178, 21978021978, 21999999978 (3種類)

12 桁 217800002178, 217821782178, 219780021978, 219978219978, 219999999978 (5種類)

13 桁 2178000002178, 2178219782178, 2197800021978, 2199780219978, 2199999999978 (5種類)

14 桁 21780000002178, 21780217802178, 21782199782178, 21978000021978, 21978217821978, 21997800219978, 21999782199978, 21999999999978 (8種類)

15 桁 217800000002178, 217802197802178, 217821999782178, 219780000021978, 219782197821978, 219978000219978, 219997802199978, 219999999999978 (8種類)

16 桁 2178000000002178, 2178002178002178, 2178021997802178, 2178217821782178, 2178219999782178, 2197800000021978, 2197802178021978, 2197821997821978, 2199780000219978, 2199782178219978, 2199978002199978, 2199997821999978, 2199999999999978 (13種類)

17 桁 21780000000002178, 21780021978002178, 21780219997802178, 21782178021782178, 21782199999782178, 21978000000021978, 21978021978021978, 21978219997821978, 21997800000219978, 21997821978219978, 21999780002199978, 21999978021999978, 21999999999999978 (13種類)

18 桁 217800000000002178, 217800021780002178, 217800219978002178, 217802178217802178, 217802199997802178, 217821780021782178, 217821978219782178, 217821999999782178, 219780000000021978, 219780021780021978, 219780219978021978, 219782178217821978, 219782199997821978, 219978000000219978, 219978021780219978, 219978219978219978, 219997800002199978, 219997821782199978, 219999780021999978, 219999978219999978, 219999999999999978 (21種類)

19桁 2178000000000002178, 2178000219780002178, 2178002199978002178, 2178021780217802178, 2178021999997802178, 2178217800021782178, 2178219780219782178, 2178219999999782178, 2197800000000021978, 2197800219780021978, 2197802199978021978, 2197821780217821978, 2197821999997821978, 2199780000000219978, 2199780219780219978, 2199782199978219978, 2199978000002199978, 2199978219782199978, 2199997800021999978, 2199999780219999978, 2199999999999999978 (21種類)