# 第13回新潟県数学選手権　中学生大会（個人）問題解説

## 1

$m = 8\ 7\ 5\ 3\ 1$，$n = 9\ 6\ 4\ 2$
$mn = 8\ 4\ 3\ 9\ 7\ 3\ 9\ 0\ 2$

**解説**
桁数をそろえることを考えよう。

積$mn$を10倍した数$mn \times 10$が最大ならば$mn$も最大となることに注意する。このことから，4桁の数$n$を10倍した5桁の数$n' = 10n$を考えると，問題は0から9の10個の数を並べかえて5桁の数$m$と$n'$を作り，その積$mn'$が最大になる場合を考えればよいことになる。ただし，$n'$の一の位は0とする。$m$と$n'$は以下のようにして作ればよい。

| 万 | 千 | 百 | 十 | 一 |
|---|---|---|---|---|
| 9 | | | | |
| 8 | | | | |

最大の積を作るので，左の表の万の位に大きい数，9と8を入れる。

| 万 | 千 | 百 | 十 | 一 |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 6 | | | |
| 8 | 7 | | | |

次に千の位に残りの数の中で大きい数，7と6を入れる。このとき，二つの数（左の表の上下）の差が小さくなるように入れると積は大きくなることに注意する（※）。このことから，左の表の上段に6を下段に7を入れる。

| 万 | 千 | 百 | 十 | 一 |
|---|---|---|---|---|
| 9 | 6 | 4 | 2 | 0 |
| 8 | 7 | 5 | 3 | 1 |

以下，同じ考えで百の位には5と4を，十の位には3と2を，一の位には1と0を，それぞれ下段の数が大きくなるように入れる。

$m = 87531, n' = 96420$とすると，その積$mn'$は最大となる（※）。$n' = 10n$であったから，$n = 9642$であり，このとき積$mn = 843{,}973{,}902$が最大となる。

**※の解説**
一般に，二つの数の和が一定であるとき，差が小さい方が二つの数の積は大きくなる。
実際，$m + n = c, m - n = p$とおくと，

$$4mn = (m+n)^2 - (m-n)^2 = c^2 - p^2$$

が成り立つから，$c$が一定のとき，$p$が小さいほうが積$mn$は大きくなる。
たとえば，1と8よりも4と5の方が積は大きい。

この問題の場合，各桁に入る数は二つに決まっているので（たとえば千の位なら7か6，百の位なら5か4），二つの数$m$と$n$の和は常に

$$90{,}000 + 80{,}000 + 7{,}000 + 6{,}000 + 500 + 400 + 30 + 20 + 1 + 0$$

となり，一定である。したがって，差を小さくするように数を作れば積は大きくなる。

## 2

$\boldsymbol{\ell = 6}$， $\boldsymbol{m = 28}$

**解説**
例えば4で考える。約数は4,2,1である。逆数をとって和をとると，

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}=\frac{1+2+4}{4}=\frac{7}{4}$$

となる。この例から，分子に約数がすべて表れると予想できる。
したがって，約数をすべて足して元の数の2倍になっている数を小さい順に求めていけばよい。最初に6，次に28が見つかる。
ちなみに，この問題は**完全数**（自分自身を除く正の約数の和に等しくなる自然数）を求めることと同じである。

## 3

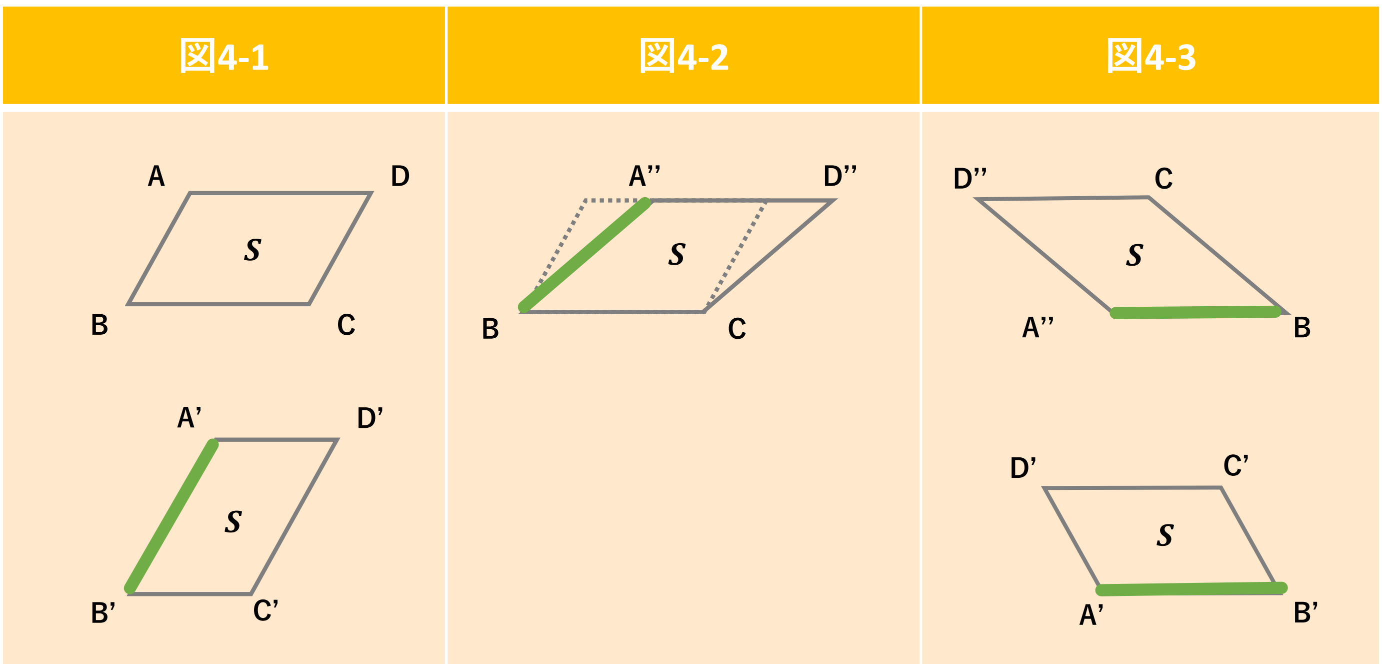
**解説**
10個の連続する整数$x, y$の差は 9 以下であるので$x, y$の公約数は 9 以下である。したがって 9 以下の素数 2,3,5,7で割れない整数があることを示せばよい。奇数は 5 個あり、この中で 3 の倍数は多くても2個である。よって少なくとも 3 個は 2 でも 3 でも割り切れない。この中で 5，7 で割れるものはそれぞれ多くても一つしかないので 1 個は 2,3,5,7 で割り切れない。

# 4

**ボヤイ・ゲルヴィンの定理**として知られています。

a. 図形$P_2$上には$P_1$と$P_2$が等積図であることを示すための分割と，$P_2$と$P_3$が等積図であることを示すための分割と，二重の分割が得られている。この分割を$P_1$と$P_3$に引き写すことにより，$P_1$と$P_3$により細かい分割が得られる。この分割で$P_1$と$P_3$は等積図であることがわかる。

b. 面積の等しい二つの平行四辺形ABCDとA’B’C’D’でAB<A’B’とする（図4-1）。底辺BCを固定してADを横方向に平行移動することでA’’D’’とし，A’’B＝A’B’であるようにする（図4-2）。ここでA’’BCD’’の底辺をA’’Bとし，A’B’C’D’の底辺をA’B’とすることで（図4-3），A’’BCD’’とA’B’C’D’は底辺の長さと面積が等しい，つまり高さも等しい平行四辺形となる。底辺と高さが等しい平行四辺形は等積図であったから（問題文と図1），平行四辺形A’’BCD’’と平行四辺形A’B’C’D’は等積図である。ABCDとA’’BCD’’も底辺と高さが等しい平行四辺形であるから等積図である。したがって，（a）の結果よりABCDとA’B’C’D’は等積図となる。



**4**

c. 中点連結定理より$DE = \frac{1}{2}BC$，$BC \parallel DE$が成り立つ。ここで「∥」は平行を表す記号である。DE = EFより$DF = 2DE = BC$である。ゆえに四角形BCFDは向かい合う辺が等しく平行であるから平行四辺形である。また，

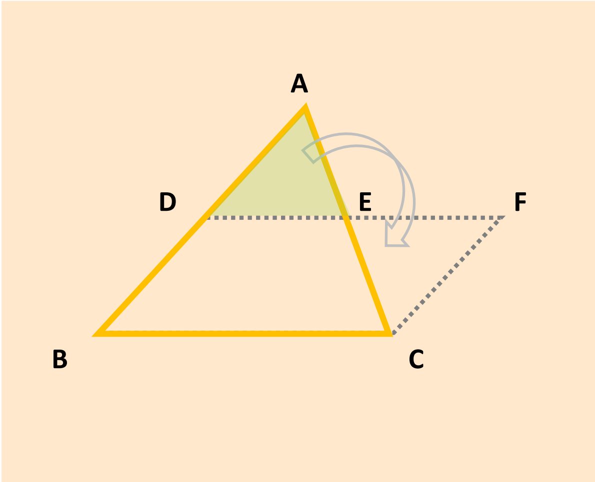
$$\angle AED = \angle CEF \quad \text{（対頂角）}$$
$$DE = EF$$
$$AE = CE \quad \text{（}E\text{は}AC\text{の中点）}$$

より$\triangle AED \equiv \triangle CEF$となる。ゆえに，$\triangle AED$と$\triangle CEF$の面積は等しく，したがって，$\triangle ABC$と平行四辺形BCFDの面積も等しい。

$\triangle AED \equiv \triangle CEF$であるから，図4-4のように$\triangle ABC$を分割し，$\triangle ADE$を$\triangle CEF$と重なるように組み合わせると，平行四辺形を作ることができる。

以上のことから，三角形はある平行四辺形と等積図であることがわかる。

**図4-4**




d. 面積$S$の三角形$T$から(c)の方法で平行四辺形$P$を作る。$T$と$P$は等積図であるから，$P$の面積も$S$である。ところで，底辺が1で高さが$S$の長方形$R$を考える。$R$の面積は$1 \times S = S$である。また，$R$は平行四辺形でもある。したがって，(b)の結果により，$P$と$R$は面積が等しい平行四辺形であるから等積図である。$T$と$P$は等積図で$P$と$R$も等積図なので，(a)の結果より$T$と$R$は等積図となる。

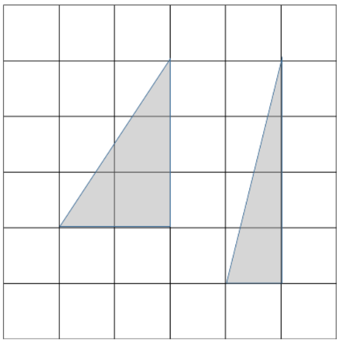
e. 面積$S$の多角形$U$を三角形に分割する。(d)の結果より，分割したすべての三角形それぞれから底辺が1の長方形を面積を変えずに作ることができる。このように作った底辺が1のすべての長方形を縦に積み上げると，面積は$S$で変わらないので，高さが$S$の長方形$R$となる。このことから，多角形$U$と長方形$R$は等積図であることがわかる。同じことを面積$S$の多角形$V$について行うと，$V$と$R$も等積図であることがわかる。逆の操作をすることで，面積を変えずに$R$から$V$を作ることができる。

したがって，(a)の結果により，$U$と$R$が等積図で$R$と$V$も等積図なので，$U$と$V$も等積図となる。

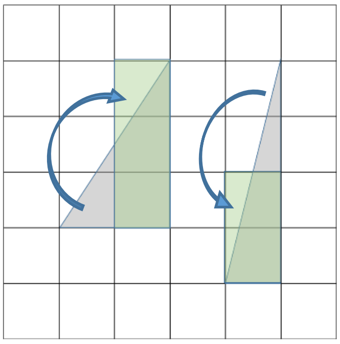
**4**

f. 例えば以下の手順①から⑦のようにすればよい。

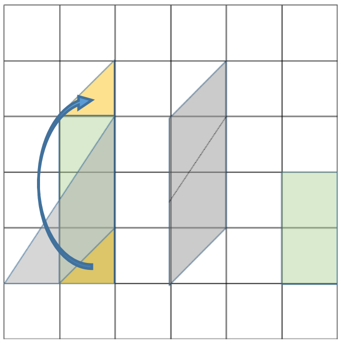
①



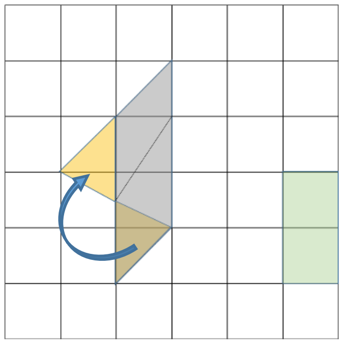
②



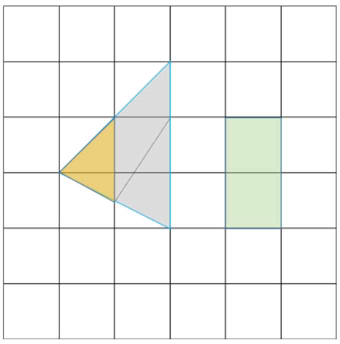
③



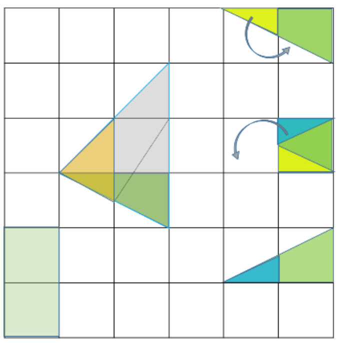
④



⑤



⑥



⑦