第12回 新潟県数学選手権 中学生大会 問題(団体)

図1のような一辺が1の正方形62マスで出来たゲームボード(8×8の大きな正方形から2マス欠けた形)がある。図2のような一辺が1の正方形2個でできたコマ31個を，ボードの上に置く。ただしコマを回転させて置くことも許す。このとき，どのようにコマを置いてもボードを重なりなく覆い尽くすことはできない。なぜなら，図1のようにボードのチェック模様を考えると，図2のコマ一つはどのように置いても灰色のマス1個を覆う。よって，全てのコマで覆われる灰色の正方形は31個であるはずだが，実際には30個しかないからである。

また，図3のような一辺が1の正方形9マスで出来たボード(3×3の正方形)がある。図4のような一辺が1の正方形3個でできたコマ3個を，ボードの上に置く。ただしコマを回転させて置くことも許す。このとき，どのようにコマを置いてもボードを重なりなく覆い尽くすことはできない。なぜなら，図3のようにボードに灰色の模様を考えると，図4のコマ一つはどのように置いても灰色のマスを多くとも1個しか覆わない。よって，全てのコマが覆う灰色の正方形は最大3個だが，実際には4個あるからである。

このように，ボードに色や文字を配置して，「ボードへのコマの敷き詰め不可能性問題」を力まかせ法(あらゆる場合を試すこと)以外の論法で証明できる場合がある。以下の問いに答えなさい。

(1) (30点) 図5のような一辺が1の正方形63マスで出来たボード(8×8の大きな正方形から1マス欠けた形)がある。図6のような一辺が1の正方形3個でできたコマ21個を，ボードの上に置く。ただしコマを回転させて置くことも許す。このとき，どのようにコマを置いてもボードを重なりなく覆い尽くすことはできない。その理由を述べなさい。

(2) (35点) 図7のような一辺が1の正方形60マスで出来たボード(8×8の大きな正方形から4マス欠けた形)がある。図8のような一辺が1の正方形4個でできたコマ15個を，ボードの上に置く。ただしコマを回転させて置くことも許す。このとき，どのようにコマを置いてもボードを重なりなく覆い尽くすことはできない。その理由を述べなさい。

(3) (35点) 同様な「ボードへのコマの敷き詰め不可能性問題」と解答例を作りなさい。ただし，ボードは，一辺が1の正方形のマスで作られた10×10の正方形に収まる大きさであること。ボードの一部が欠けていたり，いくつか穴が空いていたりしてもよい。コマは1種類で，回転させて置くことも許すが，裏返して置くことは許さない。解答の分かり易さ，問題の複雑さに応じて得点を与える。力まかせ法以外の論法には加点する。

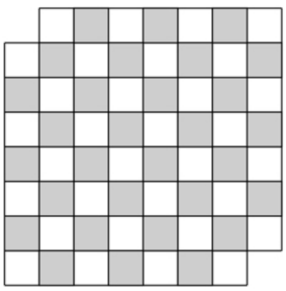

図1

図2

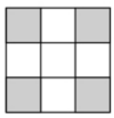

図3

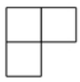

図4

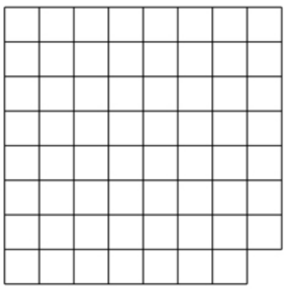

図5

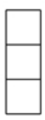

図6

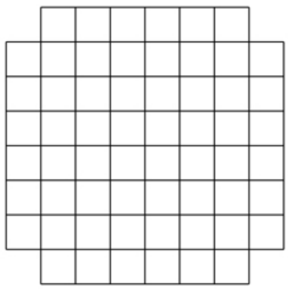

図7

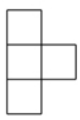

図8