第12回 新潟県数学選手権 中学生大会 解答例(団体)

(1) 図1のようにボードに 0, 1, 2 を書き込むと，図2のコマ一つはどのように置いても 0, 1, 2 を一つずつ覆う。よって，覆われる 0, 1, 2 は同数であるはずだが，実際にボード上にあるのは 0 が21個，1が22個，2が20個だから，全てのコマでボードを重なりなく覆い尽くすことはできない。

(2) 図3のようにボードのチェック模様を考えると，コマ一つはどのように置いても灰色のマスを1個あるいは3個覆う。コマの数は奇数 (15) なので，覆われる灰色のマスの数の総計は奇数であるはずだが，実際には灰色のマスの数は偶数 (30) だから，全てのコマでボードを重なりなく覆い尽くすことはできない。

0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	2
2	0	1	2	0	1	2	0
0	1	2	0	1	2	0	1
1	2	0	1	2	0	1	

図1

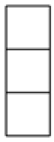

図2

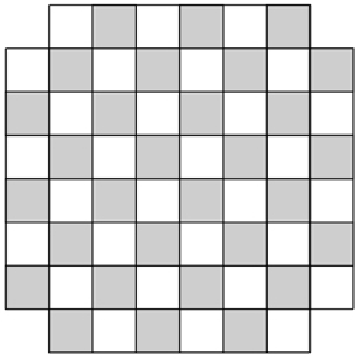

図3

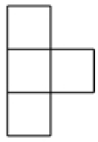

図4

(3) 以下，さまざまな問題と解答の例を挙げる。

(問題A) 図5のような一辺が1の正方形12マスで出来たボード (3×4 の長方形) がある。図6のような一辺が1の正方形4個でできたコマ3個を，ボードの上に置く。ただしコマを回転させて置くことも許す。このとき，どのようにコマを置いてもボードを重なりなく覆い尽くすことはできない。その理由を述べなさい。

（解答A）図7のようにボードの2つのマスに灰色を塗ると，図6のコマ一つはどのように置いても灰色のコマを1個以上覆う。よって，3つのコマで覆われる灰色のコマは3個以上であるはずだが，実際にボード上にあるのは2個である。よって，全てのコマをボードに重なりなく収めることはできない。

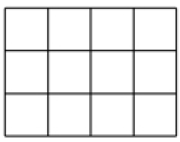

図5

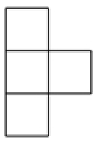

図6

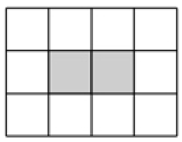

図7

(問題 B) 図 8 のような一辺が 1 の正方形 16 マスで出来たボード (4×4 の正方形) がある。図 9 のような一辺が 1 の正方形 4 個でできたコマ 4 個を，ボードの上に置く。ただしコマを回転させて置くことも許すが，裏返すことは許さない。このとき，どのようにコマを置いてもボードを重なりなく覆い尽くすことはできない。その理由を述べなさい。

（解答 B）図 10 のようにボードの 4 つのマスに灰色を塗ると，図 9 のコマ一つはどのように置いても灰色のコマを 3 個ずつ覆う。よって，4 つの全てのコマで覆われる灰色のコマは 12 個であるはずだが，実際にボード上にあるのは 8 個だから，全てのコマをボードに重なりなく収めることはできない。

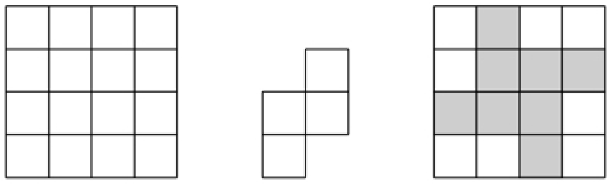

図8　図9　図10

(問題 C) 図 11 のような一辺が 1 の正方形 12 マスで出来たボード (4×4 の正方形から四隅が欠けた形) がある。図 12 のような一辺が 1 の正方形 4 個でできたコマ 3 個を，ボードの上に置く。ただしコマを回転させて置くことも許す。このとき，どのようにコマを置いてもボードを重なりなく覆い尽くすことはできない。その理由を述べなさい。

（解答 C）図 13 のようにボードの 4 つのマスに灰色を塗ると，図 12 のコマ一つはどのように置いても灰色のコマを 2 個以上覆う。よって，3 つのコマで覆われる灰色のコマは 6 個以上であるはずだが，実際にボード上にあるのは 4 個である。よって，全てのコマをボードに重なりなく収めることはできない。

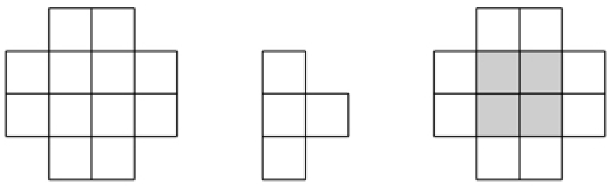

図11　図12　図13

(問題D) 図 14 のような一辺が 1 の正方形 60 マスで出来たボード (8×8 の大きな正方形から 4 マス欠けた形) がある。図 15 のような一辺が 1 の正方形 4 個でできたコマ 15 個を，ボードの上に置く。ただしコマを回転させて置くことも許す。このとき，どのようにコマを置いてもボードを重なりなく覆い尽くすことはできない。その理由を述べなさい。

（解答 D）図 16 のようにボードに 0, 1, 2, 3 を書き込むと，図 15 のコマ一つはどのように置いても 0, 1, 2, 3 を 1 個ずつ覆う。よって，覆われる全てのコマの数字は 0, 1, 2, 3 は同数であるはずだが，実際にボード上にあるのは 0 が 15 個，1 が 16 個，2 が 15 個，3 が 14 個だから，全てのコマでボードを重なりなく覆い尽くすことはできない。

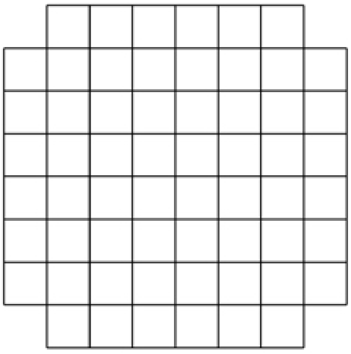

図14

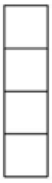

図15

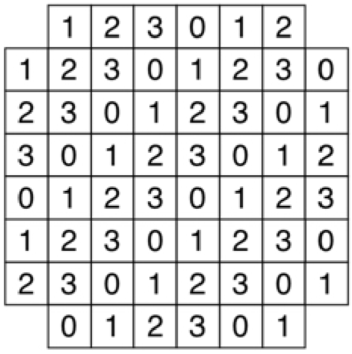

図16

(問題E) 図 17 のような一辺が 1 の正方形 45 マスで出来たボード (7×7 の大きな正方形から黒く塗った 4 マスが欠けた形) がある。図 18 のような一辺が 1 の正方形 3 個でできたコマ 15 個を，ボードの上に置く。ただしコマを回転させて置くことも許す。このとき，どのようにコマを置いてもボードを重なりなく覆い尽くすことはできない。その理由を述べなさい。

（解答 E）覆うべき面積は 45 なので，図 18 のコマは 15 個使う。一方，図 19 のようにボードにバツを配置すると，図 9 のコマ一つはどのように置いてもバツを多くとも 1 個しか覆わない。よって，全てのコマで覆われるバツは多くて 15 個であるはずだが，実際にはバツは 16 個あるから，全てのコマでボードを覆い尽くすことはできない。

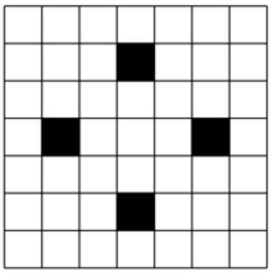

図17

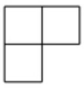

図18

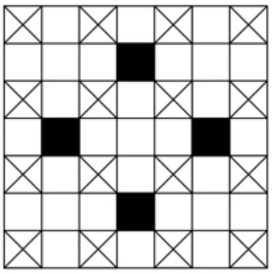

図19

(問題 F) 図 20 のような一辺が 1 の正方形 60 マスで出来たボード (8×8 の大きな正方形から 2×2 の 4 マス欠けた形) がある。図 21 のような一辺が 1 の正方形 5 個でできたコマ 12 個を，ボードの上に置く。ただしコマを回転させて置くことも許すが，裏返すことは許さない。このとき，どのようにコマを置いてもボードを重なりなく覆い尽くすことはできない。その理由を述べなさい。

（解答 F）図 22 のようにボードに 0, 1, 2, 3, 4 を書き込むと，図 21 のコマ一つはどのように置いても 0, 1, 2, 3, 4 を一つずつ覆う。よって，全てのコマで覆われる 0, 1, 2, 3, 4 は同数であるはずだが，実際にボード上にあるのは 0 が 12 個，1 が 12 個，2 が 13 個，3 が 11 個，4 が 12 個だから，全てのコマでボードを重なりなく覆い尽くすことはできない。

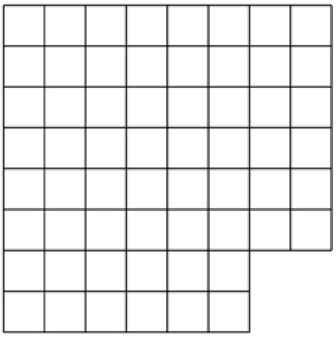

図20

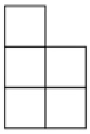

図21

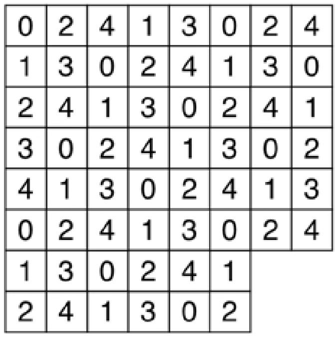

図22

(問題 G) 図 23 のような一辺が 1 の正方形 72 マスで出来たボード (9×9 の大きな正方形から黒い部分の合計 9 マス抜けた形) がある。図 24 のような一辺が 1 の正方形 8 個でできたコマ 9 個を，ボードの上に置く。ただしコマを回転させて置くことも許す。このとき，どのようにコマを置いてもボードを重なりなく覆い尽くすことはできない。その理由を述べなさい。

（解答 G）図 25 のようにボードに灰色のコマで縞模様をつけると，コマ 1 つはどのように置いても (縦においても横に置いても) 灰色のマスを 3 個あるいは 5 個覆う。コマの数が奇数なので，全てのコマで覆われる灰色のマスの総計は奇数個であるはずだが，実際には灰色のマスは偶数 (38) だから，全てのコマでボードを重なりなく覆い尽くすことはできない。

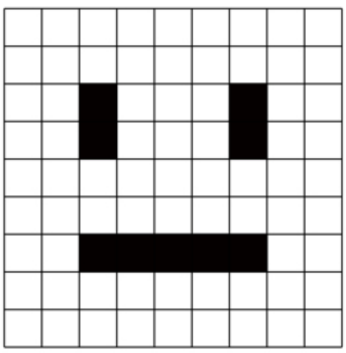

図23

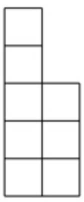

図24

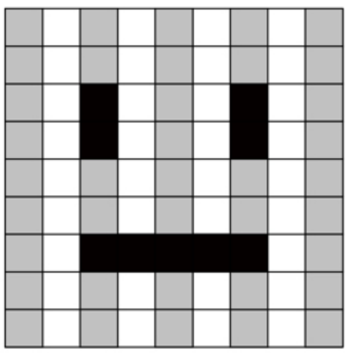

図25