第11回 新潟県数学選手権 中学生大会 解答例(個人)

問題1 (25点)

(1) ■□■■□■ → □■□■□■ → □□■□□■ → □□□□■■ → □□□□□□

(2) 最も左の■に注目すると，操作による変化は,「■■ → □□」,「■□■ → □■□」,「■□□ → □□■」のいずれかなので，一番左の■が□へ変化する。よって，操作を繰り返せば， 左端から□の連続の数が増えていき，いつかは右端の2つ以外の箇所は全て□となる。更に右端の2つは「□□」,「□■」,「■□」,「■■」のいずれかであるが,「■■」はもう一回の操作で「□□」になるので，最後は最も右の2つが「□□」,「□■」,「■□」のいずれかになって終了する。

(3) 列の右から数えて奇数番目にある■のカードがa枚，列の右から数えて偶数番目にある■のカードがb枚であるとする。

終了状態では，最も右の2枚以外は□である。最も右の2枚は，次のように決まる。

$$\text{終了状態における最も右の2枚} = \begin{cases} \square\square & (a-b\text{を3で割った余りが0のとき}) \\ \square\blacksquare & (a-b\text{を3で割った余りが1のとき}) \\ \blacksquare\square & (a-b\text{を3で割った余りが2のとき}) \end{cases} \qquad \cdots (\text{☆})$$

ただし，$a-b$は負になることもあるので,「3で割った余り」を次のように定義する。

> すべての整数mについて，ある整数qが存在して$0 \leqq m-3q < 3$とすることができる。この$m-3q$を「mを3で割った余り」と定義する。

これによって，すべての整数mについて，次が言える。

$$(m\text{を3で割った余り}) = (m+3\text{を3で割った余り}) = (m-3\text{を3で割った余り})$$

さて，(☆) の証明を以下に述べる。

操作の前のa, bに対し，各操作の後をa', b'とすると各操作によって次のように変化する。

(操作a) ■■→□□ により，$a' = a-1, b' = b-1$なので，$a'-b' = a-b$。

(操作b) ■□■→□■□ により，一番左の■が右から数えて奇数番目にあるか偶数番目にあるかに応じて，$a' = a-2,\ b' = b+1$，あるいは，$a' = a+1,\ b' = b-2$となる。

前者の場合，$a'-b' = a-b-3$。後者の場合，$a'-b' = a-b+3$。

(操作c) ■□□→□□■ により，$a' = a,\ b' = b$なので，$a'-b' = a-b$。

以上により，各操作で$(a-b\text{を3で割った余り}) = (a'-b'\text{を3で割った余り})$である。よって，初期状態と終了状態で，3で割った余りは等しいことが言えた。

一方，□□，□■，■□ の$a-b$を3で割った余りは0，1，2なので，(☆) が証明された。

問題 2 (25 点)

(1) 図 1 で，三角形 ABC = 三角形 OAB + 三角形 OBC + 三角形 OAC より，$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \mathrm{OH}'' \cdot 5$。よって，$\underline{\mathrm{OH}'' = 1}$。

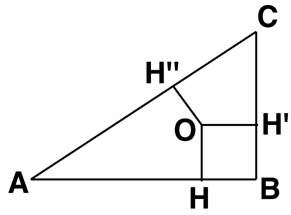


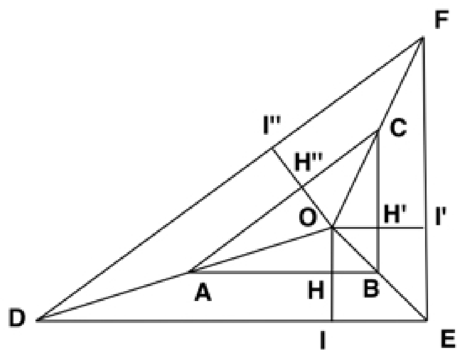
図 1

(2) 三角形 ABC に対し，条件を満たす三角形 DEF は，ただ 1 通りしかないので，D，E，F を以下のように取る。

線分 OA の点 A を越えた延長線上に OA = AD となる点 D を，線分 OB の点 B を越えた延長線上に OB = BE となる点 E を，線分 OC の点 C を越えた延長線上に OC = CF となる点 F を取る。

このとき，三角形 DEF は，問題の条件を満たすことを示そう。

直線 OH と直線 DE の交点を I，直線 OH′ と直線 FE の交点を I′，直線 OH″ と直線 DF の交点を I″ とする。



AB と DE は平行なので，AB と DE は OI と垂直に交わっている。また，OH : HI = OA : AD = 1 : 1 より，HI = 1。よって直線 AB と直線 DE は平行で距離が HI = 1 である。同様にして，直線 BC と直線 EF は平行で距離が H′I′ = 1，直線 AC と直線 DF は平行で距離が H″I″ = 1 である。

以上より，三角形 DEF は，問題の条件を満たしていることが示せた。

さて，AB : DE = OA : OD = 1 : 2 なので，DE = 8。他の辺についても同様で，$\underline{\mathrm{DE} = 8, \mathrm{EF} = 6, \mathrm{DF} = 10}$ である。

(別解)

図 2 のように，H, H′, H″ を (1) の通りとし，A から DE, DF に下した垂線の足を A″, A′，B から DE, EF に下した垂線の足を B′, B″，C から EF, DF に下した垂線の足を C′, C″ とする。

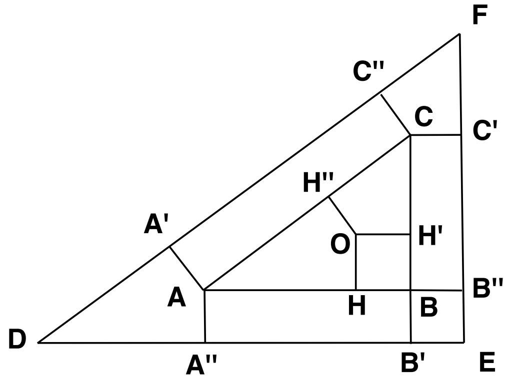


図 2

$\mathrm{AA''} = \mathrm{AA'} = 1$ なので，直角三角形 $\mathrm{DAA''} \equiv$ 直角三角形 $\mathrm{DAA'}$。(1) より $\mathrm{OH} = \mathrm{OH''} = 1$ なので，直角三角形 $\mathrm{AOH} \equiv$ 直角三角形 $\mathrm{AOH''}$。また，DE と AB は平行，DF と AC は平行なので，$\angle \mathrm{A''DA'} = \angle \mathrm{HAH''}$。よって，

$$\text{直角三角形 } \mathrm{DAA''} \equiv \text{直角三角形 } \mathrm{DAA'} \equiv \text{直角三角形 } \mathrm{AOH} \equiv \text{直角三角形 } \mathrm{AOH''}。$$

同様にして，

$$\text{直角三角形 } \mathrm{FCC'} \equiv \text{直角三角形 } \mathrm{FCC''} \equiv \text{直角三角形 } \mathrm{COH'} \equiv \text{直角三角形 } \mathrm{COH''}。$$

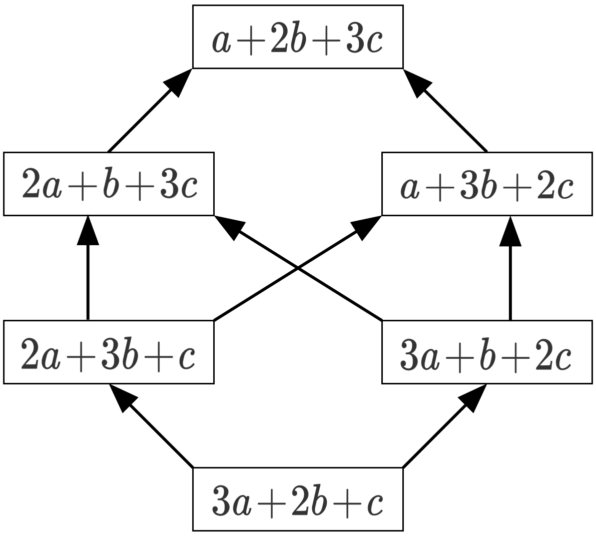
よって，$\mathrm{DE} = \mathrm{DA''} + \mathrm{A''B'} + \mathrm{B'E} = \mathrm{DA''} + \mathrm{AH} + \mathrm{HB} + \mathrm{B'E} = 2\mathrm{AH} + 2\mathrm{HB} = 2\mathrm{AB} = 8$。同様に $\mathrm{FE} = 2\mathrm{CB} = 6$。$\mathrm{DF} = 2\mathrm{AC} = 10$。

以上まとめて，$\underline{\mathrm{DE} = 8,\ \mathrm{EF} = 6,\ \mathrm{DF} = 10}$ である。

問題 3 (25 点)

(1) $Y - X = (3a + 5b) - (5a + 3b) = 2b - 2a > 0$ より，$X \longrightarrow Y$ である。

(2) 下図の通り。



(3) n を自然数とするとき，次が言える。

$$\text{もし } x > y \text{ なら，} \frac{x}{n} + \frac{y}{n+1} > \frac{y}{n} + \frac{x}{n+1} \text{ である。}$$

なぜなら，不等式の 左辺 − 右辺 を計算すると，

$$\left(\frac{x}{n} + \frac{y}{n+1}\right) - \left(\frac{y}{n} + \frac{x}{n+1}\right) = \frac{x-y}{n(n+1)} > 0$$

となるからである。

よって，「$n = 1,\ x = a,\ y = b$」あるいは「$n = 2,\ x = b,\ y = c$」あるいは「$n = 3,\ x = c,\ y = d$」あるいは「$n = 4,\ x = d,\ y = e$」とすることにより，次が言える。

> $X = \dfrac{a}{1} + \dfrac{b}{2} + \dfrac{c}{3} + \dfrac{d}{4} + \dfrac{e}{5}$ に現れる隣り合う 2 つの分数の分子どうし比べて左の方が大きいとき，その 2 つの分数の分子を交換すると，X は小さくなる。

ゆえに，X が最小になるとき，$a < b < c < d < e$ である。すなわち，$a = 1,\ b = 2,\ c = 3,\ d = 4,\ e = 5$ で，X の最小値は 5。

問題 4 (25 点)

(1) $h = a + b,\ w = b - a + 1$。

(2) S は長方形 $[h \times w]$ の面積 hw の半分なので，$S = \dfrac{(a+b)(b-a+1)}{2}$。

(3) 長方形 $[h \times w]$ が階段和 $S = a + \cdots + b$ で分割されているとすれば，(1) より $h - w = 2a - 1 =$ 正の奇数。よって，$h,\ w$ は，

$$「h > w，かつ h と w の偶奇が異なる」 \cdots (☆)$$

を満たす。

(4) $h = a + b, w = b - a + 1 \ \cdots (*)$ から a, b を h, w を a, b で表すと，

$$a = \frac{h - w + 1}{2}, \quad b = \frac{h + w - 1}{2} \quad \cdots \ (**)$$

である。逆に $(**)$ から $(*)$ も導ける。

$h,\ w$ が (☆) を満たすなら，$h - w + 1, h + w - 1$ は両方とも偶数で，したがって $(**)$ を満たす a, b は自然数である。また，$b - a = w - 1 \geqq 0$ より $a \leqq b$ である。よって，長方形 $[h \times w]$ は，この a, b による階段和 $S = a + \cdots + b$ で分割される。

(5) **(この対応が一対一であること)** 長方形 $[h \times w]$ と長方形 $[h' \times w']$ が (☆) を満たすとする。すなわち,「$2S = hw = h'w'$, $h > w$, $h' > w'$, h と w, h' と w' は偶奇が異なる。」とする。この 2 つの長方形に 同じ S の奇約数 n が対応したとしよう。このとき，次の 4 つ場合がある。

(a) $h = h' = n$ のとき，$w = w'$ となり，$[h \times w]$ と $[h' \times w']$ は等しい。
(b) $h = w' = n$ のとき，$h^2 > hw = h'w' > w'^2$ と矛盾するので，このような場合はない。
(c) $h' = w = n$ のとき，(b) と同様にして，このような場合はない。
(d) $w = w' = n$ のとき，(a) と同様にして $[h \times w]$ と $[h' \times w']$ は等しい。

いずれにしても $[h \times w]$ と $[h' \times w']$ は等しい。

(この対応でどんな S の奇約数も表されること) S の奇約数 n に対して，$\dfrac{2S}{n}$ は偶数なので，n と $\dfrac{2S}{n}$ のうち，大きい方を h，小さい方を w とすると，h と w は (☆) を満たす。
以上より，この対応が双方向に一対一であることが言えて，定理は証明された。