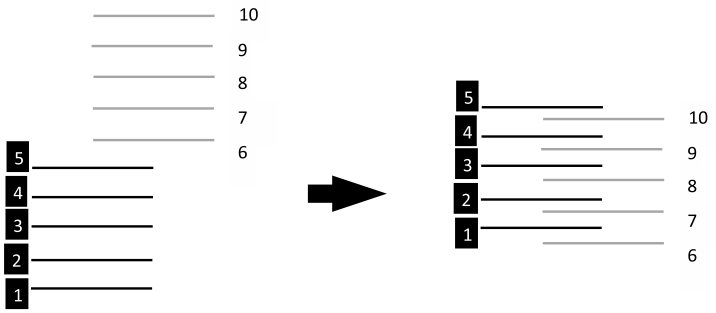
# 第10回 新潟県数学選手権 中学生大会 問題(団体)

$n$を自然数とする。$2n$枚のカードが重ねてあるとして，次のようなシャッフル(カードの混ぜあわせ)をする。

「カードの山を上下$n$枚ずつ2つの山に分けて，上の山を先に，上下の山のカードを1枚ずつ互い違いに重ねる。」

例えば，$n=5$の場合，下図のように，最初のカードを下から，1,2,3,4,5,6,7,8,9,10と名付けると，シャッフル後は6,1,7,2,8,3,9,4,10,5となる。




次はシャッフルを3回繰り返した様子を表している。

$$\begin{aligned} 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \to\ & 6,1,7,2,8,3,9,4,10,5 \\ \to\ & 3,6,9,1,4,7,10,2,5,8 \\ \to\ & 7,3,10,6,2,9,5,1,8,4 \end{aligned}$$

以下の問いに答えなさい。ただし,「○枚目のカード」と書けば，下から○枚目を意味することにする。

(1) $n=5$の場合，シャッフルを何回繰り返すと全てのカードが同時に元の位置に戻るか。その最小の回数を答えなさい。

(2) シャッフルを1回行ったとき，$x$枚目のカードが$y$枚目に移動したとする。$1 \leqq x \leqq n$のとき，および$n+1 \leqq x \leqq 2n$のとき，それぞれの場合について，$y$を$x$で表しなさい。

また，このカードのシャッフルについて次のことがいえる：

(A) シャッフルを$k$回行ったとき，$x$枚目のカードが$y$枚目に移動したとすると，$y$は$2^k x$を$2n+1$で割った余りである。

更に以下の問いに答えなさい。

(3) 5回シャッフルをしたら全てのカードが元の位置に戻ったとするとき，(A)を認めて，$n$を求めなさい。

(4) どんな$n$についても，シャッフルを繰り返すと，$2n$回以下で全てのカードが同時に元の位置に戻る。(A)を認めて，その理由を説明しなさい。

(5) (A)が正しい理由を説明しなさい。