第10回 新潟県数学選手権 中学生大会 解答例(個人)

問題1 (20点)

(1) (x, y) の場合の数は，36通りである。そのうち $x+y$ が偶数になるのは，図の白い四角を数えて18通り。よって求める確率は $\frac{18}{36}=\frac{1}{2}$。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

(枠外の縦と横の1から6の数字はそれぞれのさいころの目を表し，枠内はその和を表している。)

(2) $x=$ 偶数 となる面は3つ，$x=$ 奇数 となる面は3つある。$z=$ 偶数 となる面が a あるとすると，$z=$ 奇数 となる面は $6-a$ ある。

$x+z$ が偶数になるのは「$x=$ 偶数 かつ $z=$ 偶数」または,「$x=$ 奇数 かつ $z=$ 奇数」であるから，合計 $3\times a+3\times(6-a)=18$ 通りである。

よって，求める確率は $\frac{1}{2}$ である。

(別解)z が偶数のとき，$x+z$ が偶数になるか奇数になるかは，x が偶数になるか奇数になるかに従い，それらは等確率である。また，z が奇数であるときも同様。よって，いずれにしても $x+z$ が偶数になるか奇数になるかは等確率であり，$\frac{1}{2}$ である。

(3) 以下「余り」と書くと「3で割った余り」を意味するとする。

x の余りが $0, 1, 2$ である面はそれぞれ2つずつある。z の余りが $0, 1$ である面がそれぞれ $a,\ b$ ずつあるとすれば，z の余りが2である面は $6-a-b$ ある。

$x+y$ の余りが0になるのは,「x の余りが0かつ z の余りが0」または「x の余りが1かつ z の余りが2」または「x の余りが2かつ z の余りが1」であるから，合計 $2\times a+2\times(6-a-b)+2\times b=12$ 通りである。よって，求める確率は $\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$ である。

(別解)z の余りが0のとき，$x+z$ の余りが $0, 1, 2$ になるのは，x の余りが $0,\ 1,\ 2$ になることに従い，それらは等確率である。また，z の余りが $1, 2$ のときも同様。よって，いずれにしても $x+z$ の余りはそれぞれ等確率で起こり，$\frac{1}{3}$ である。

問題 2 (20 点)

(1) 各桁 1 か 2 の 2 通り。それが 5 桁あるので，$2^5 = \underline{32}$ 個の自然数がある。

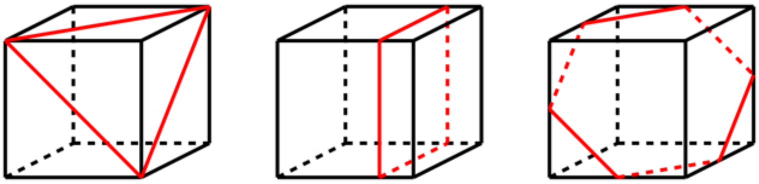
(2) n を 5 桁の自然数とする。n の各桁が 1 か 2 であることと $33333 - n$ の各桁が 1 か 2 であることは同じことなので，n の各桁が 1 か 2 であるように小さい順に 16 通り動くとき，$33333 - n$ は，大きい順に 16 通り動き，それらで条件を満たす 32 個の自然数が尽くされる。

n ごとに 2 つの自然数をペアにして足して行くと，$n + (33333 - n) = 33333$ が 16 個あるので，答えは $33333 \times 16 = \underline{533328}$ である。

(3) n を 5 桁の自然数とする。n の各桁が 1 か 2 か 3 であることと $44444 - n$ の各桁が 1 か 2 か 3 であることは同じことである。n の各桁が 1 か 2 か 3 であるように小さい順に $3^5 = 243$ 通り動くとき，$44444 - n$ は，同じ条件を満たし大きい順に 243 通り動く。

このときできる 243×2 個の自然数を，n ごとにペアにして足して行くと，$n+(44444-n) = 44444$ が 243 個あるので，答えは $44444 \times 243 \div 2 = \underline{5399946}$ である。

問題 3 (20 点)　立方体の面は 6 つなので，平面との交わりでできる線分は高々6 本。従って n は 6 以下となる。正三角形，正方形，正六角形は下図のように容易に作れる。



従って正五角形が作れないことを言えばよい。

さて，五角形の断面ができるとすれば，その五角形の各辺は，正方形の 6 面を含む 6 つの平面の内，5 つに含まれる。この 5 平面の中には平行な平面 A, B が含まれる。このとき切断する平面と A, B を含む平面との交わりでできる 2 直線は平行である。(なぜなら，交わると A, B が平行であることに反する。) しかし，正五角形には平行な辺はないので正五角形が断面に現れることはない。

問題 4 (20 点)

正三角形 ABC の 1 辺の長さを a と置く。

(1) $a(\mathrm{PH}+\mathrm{PI}+\mathrm{PJ}) = a\mathrm{PH}+a\mathrm{PI}+a\mathrm{PJ} = (2\triangle\mathrm{PBC}+2\triangle\mathrm{PCA}+2\triangle\mathrm{PAB}) = 2\triangle\mathrm{ABC}$ である。よって，$\mathrm{PH}+\mathrm{PI}+\mathrm{PJ} = \dfrac{2}{a}\triangle\mathrm{ABC}$ となり，これは一定である。

(2) $\mathrm{A}' \neq \mathrm{H}$ ならば，三角形 $\mathrm{A}'\mathrm{HP}$ は PA' が斜辺である直角三角形であり，$\mathrm{PA}' > \mathrm{PH}$ である。すなわち，常に $\mathrm{PA}' \geqq \mathrm{PH}$ であり，等号が成り立つのは，$\mathrm{A}' = \mathrm{H}$ のときである。同様に，常に $\mathrm{PB}' \geqq \mathrm{PI}$ であり，等号が成り立つのは，$\mathrm{B}' = \mathrm{I}$ のときである。また，常に $\mathrm{PC}' \geqq \mathrm{PJ}$ であり，等号が成り立つのは，$\mathrm{C}' = \mathrm{J}$ のときである。

よって常に，$\mathrm{PA}'+\mathrm{PB}'+\mathrm{PC}' \geqq \mathrm{PH}+\mathrm{PI}+\mathrm{PJ}$ であり，(1) よりこの右辺の値は一定である。また，等号が成り立つのは，$\mathrm{A}' = \mathrm{H}$ かつ $\mathrm{B}' = \mathrm{I}$ かつ $\mathrm{C}' = \mathrm{J}$ であるときであり，これは，P が線分 AA'，BB'，CC' 上にあるときであり，これは P が O であるときである。

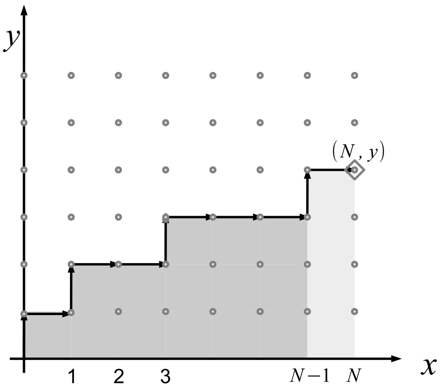
問題 5 (20 点)

(1) 下の表より，$\underline{h = 15}$。

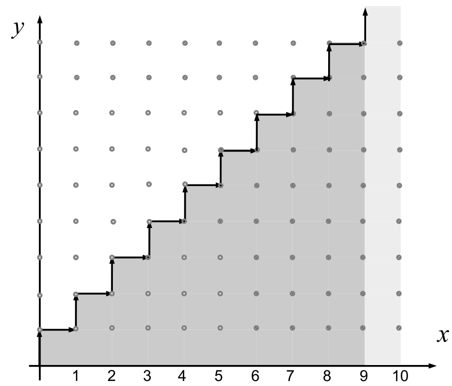
年	0		1		2		3		4		5		6		7
選択		K		K		T		K		T		T		K	
田んぼ	0	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4
米	1	0	1	0	2	2	4	3	6	6	9	9	12	11	15

(2) 図 **(う)** の軌跡の各垂直線はそれぞれの田んぼを表しており, そこと $x = N$ で挟まれた部分の面積が, その田んぼの生み出す俵の数である。よって, 全ての田んぼが合わせて S 俵の米を生み出すが, y 枚の田んぼに対してそれと同じ俵の数を払っており，初めに 1 俵持っていたため, $\underline{h = S - y + 1}$。

(3) $S - y$ は, 下図 **(う)** の濃い影をつけた部分, すなわち $x = N - 1$ より左側の石軌跡と x 軸で挟まれる部分の面積になる。 この面積を最大にするには明らかに K を選びつづければよい。$N = 10$ のとき, 下図 **(え)** の様に K を 10 回選べば, $h = (1 + 2 + \cdots + 9) + 1 = \underline{46}$ となりこれが最大である。なお, 最後の 1 回は T を選んでもやはり同じ $h = 46$ となる。



(う)



(え)

(4) 前問と同様に考えて，$S - y$ が 34 に等しくなればよい。9 回のうち K が 5 回で $S - y$ が最大になるのは，K,K,K,K,K,T,T,T,T と選択する場合で，このとき $S - y = 9 + 8 + 7 + 6 + 5 = 35$ である。次に大きいのは K,K,K,K,T,K,T,T,T で，このとき $S - y = 9 + 8 + 7 + 6 + 4 = 34$ であり，条件を満たす。他の場合の $S - y$ は必ずこれより小さい値になるので，条件を満たすのはこの場合のみである。$N = 10$ に戻して，題意を満たす答えは <u>K,K,K,K,T,K,T,T,T,T</u> である。