第7回 新潟県数学選手権 中学生大会 解答例 (個人)

問題 1 (25 点)

(1) きちんと元の場所に戻るのに進むマス目の数は，ウサギの速度 8 の倍数であり，1 周のマス目数 35 の倍数でもあるため，両者の公倍数である。そして，初めて元の場所に戻るのは，両者の最小公倍数 $35 \times 8 = \underline{280}$ マス進んだときである。

(2) 同様だが，36 と 8 の最小公倍数を求めて $\underline{72}$ である。

(3) カメを止まっているものとして，相対速度で考える。最初のケースでは，カメの位置からウサギは速度 $8+2=10$ で 22 手進んでいるので，$10 \times 22 = 220$ マスを進んでいるが，ここでカメの位置に戻ってきているので，

$$n \text{ と } 10 \text{ の最小公倍数は } 220 \text{ である。} \cdots \text{(A)}$$

同様に考えて，両者右回りのケースでは，速度 $8-2=6$ で 22 手進んでいるので，$6 \times 22 = 132$ マス進んでいる。よって，

$$n \text{ と } 6 \text{ の最小公倍数は } 132 \text{ である。} \cdots \text{(B)}$$

よって，n は 220 と 132 の公約数であるが，220 と 132 の最大公約数は 44 なので，n は 44, 22, 11, 4, 2, 1 のいずれかである。それぞれについて条件 (A) と (B) をチェックすると，$n = \underline{44}$ が唯一の答えである。

問題 2 (25 点)

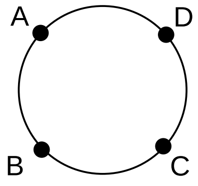


図1

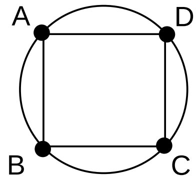
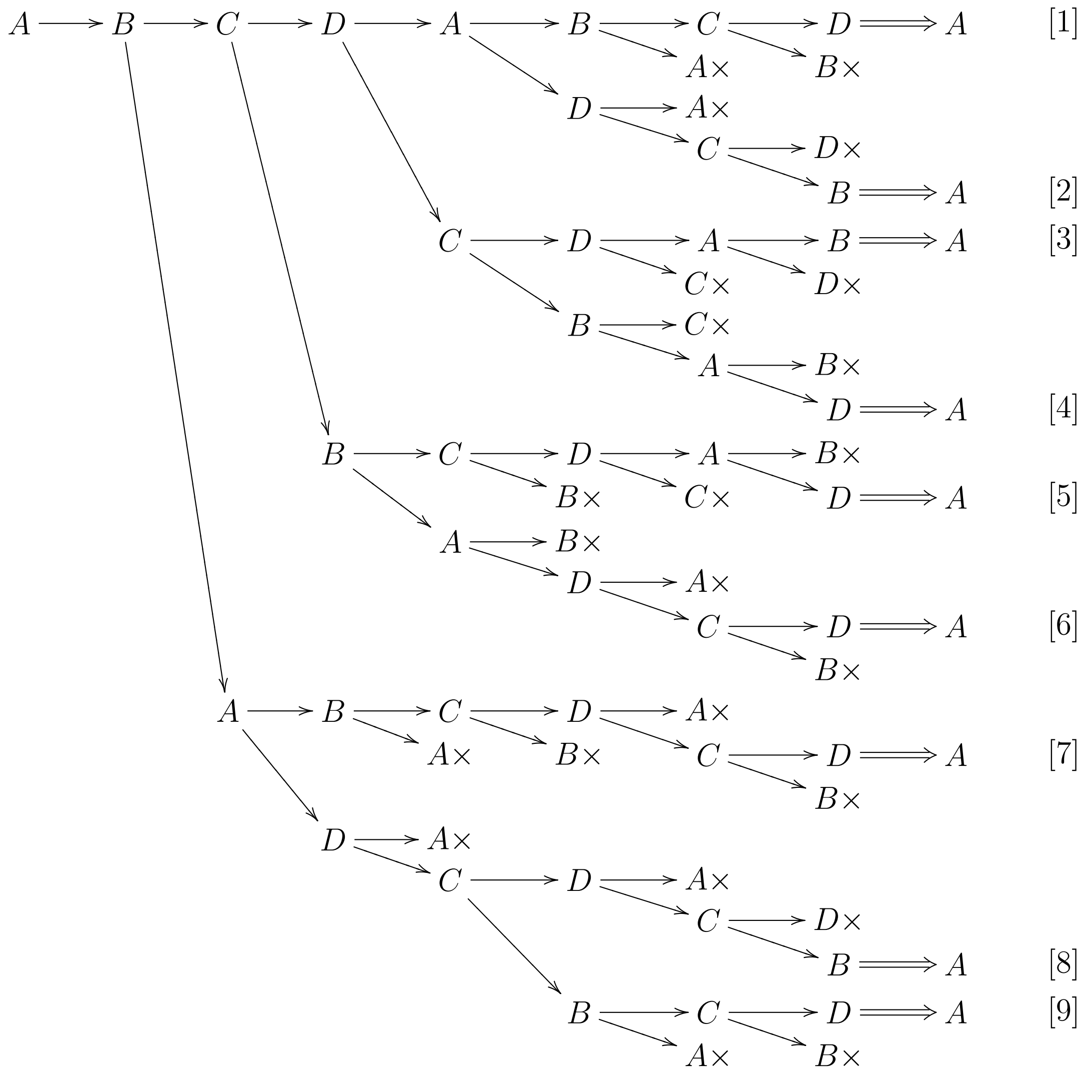


図2

(1) 条件を満たす訪問のコースは，どれも，合計 8 回家を訪問する。また，A と C からは B または D に進める，B と D からは A または C に進める，ということに注意して，コースをリストアップする。次の図は $A \longrightarrow B$ で始めるコースで，左回りを水平矢印，右回りを斜め下矢印で書き，3 回目の訪問と早すぎる A への 2 回目の訪問に $\times$ 印をつけたものである。ただし，最後の訪問は，A へ向かうものを $\Longrightarrow A$ と書き，C へ向かうものは書いていない。



以上より，$A \longrightarrow B$ で始める，条件を満たすコースは，[1] から [9] の 9 通りある。逆向き，すなわち $A \longrightarrow D$ で始めるコースも同数あり，結局すべてのコースの通り数は18 通り。

(2) 図 2 で，すべての道を 1 回ずつ通るとき，すべての家を 2 回訪問するので，その訪問方法は，前問で得られている。更に前問で，すべての道を 2 回ずつ通っていなければならないが，その条件を満たすのは，[1]，[2]，[4]，[6]，[9] の 5 通りとその逆向きの計 10 通りである。

この問題では，となり合う家の間の道は，初めて歩くときは円弧と線分の 2 通りの選び方があり，2 回目に歩くときは残った道を選ぶしかない。よって，この各コースの 8 つの矢印のうち，4 つの矢印にのみ 2 通りの道の選び方がある。以上より，答えは，$10 \times 2^4 = 160$ 通り。

問題 3 (25 点)

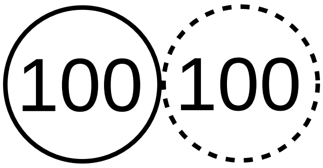


図1

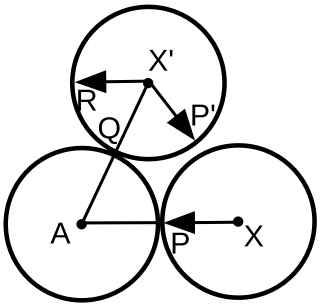


図2

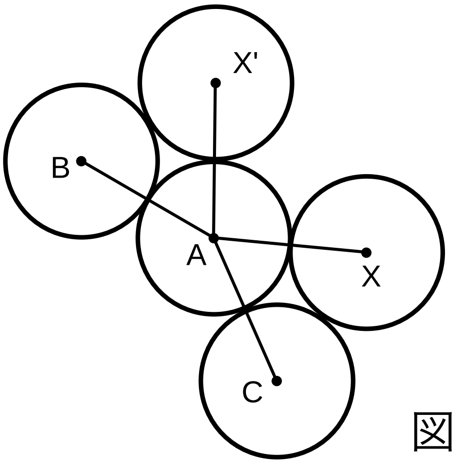


図3

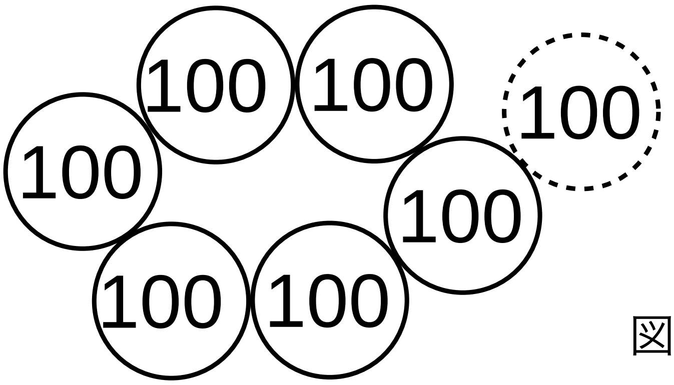


図4

(1) $\mathrm{X'R}$ と XP が平行で，同位角が等しいので，$\angle\mathrm{RX'Q} = \angle\mathrm{PAQ}$。また，百円玉は滑らず移動するので，弧 $\mathrm{P'Q}$ = 弧 PQ，よって，$\angle\mathrm{QX'P'} = \angle\mathrm{PAQ}$。

以上より，$\angle\mathrm{RX'P'} = \angle\mathrm{RX'Q} + \angle\mathrm{QX'P} = \underline{2\angle\mathrm{PAQ}}$。

(2) 固定した百円玉の中心の回りを接点が回転するが，前問で示したようにその回転角の 2 倍が移動する百円玉の回転角である。一周すれば，接点は 360 度回転するので，移動する百円玉は 720 度回転する。すなわち 2 回転することになる。

(3) 三角形 $\mathrm{ABX'}$ と三角形 ACX が正三角形であることから，$\angle\mathrm{XAX'} = 360^\circ - 60^\circ \times 2 - \angle\mathrm{BAC} = \underline{240^\circ - \angle\mathrm{BAC}}$。

(4) 6 枚の百円玉の中心を線分で結んで，六角形を作る。回転する百円玉が固定している百円玉に 2 点で接する状態から，次の 2 点で接する状態に移る間の回転に注目する。図 3 で，$\angle\mathrm{CAB}$ を六角形の一つの内角と考え，x と置くと，前問より，接点は $240^\circ - x$ 回転し，百円玉は，(1) より，その倍の $480^\circ - 2x$ だけ回転する。

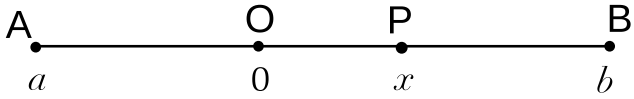
さて，全ての内角について上の角度の和を取ると，百円玉の回転角度は，$480^\circ \times 6 - 2 \times$ (六角形の内角の和) である。一方，六角形の内角の和は，$180^\circ \times 6 - 360^\circ = 720^\circ$ なので，百円玉の回転角度は，$480^\circ \times 6 - 2 \times 720^\circ$。回転数は，$\dfrac{480^\circ \times 6 - 2 \times 720^\circ}{360^\circ} = \underline{4}$。

問題 4 (25 点)

(1) $\mathrm{AO} = s\mathrm{AB}$, $\mathrm{OB} = t\mathrm{AB}$ を代入すれば，$s + t = 1$ より，全て $st\mathrm{AB}^2$ になる。

(2) 図 1 のように，O, A, B, P の座標を 0, a, b, x と置くと，$V = t(x-a)^2 + s(x-b)^2 - x^2 = (s+t-1)x^2 - 2(ta+sb)x + ta^2 + sb^2$ である。仮定より，$s+t-1 = 0$，また，$a < 0 < b$ なので，$\mathrm{AO} : \mathrm{OB} = (-a) : b = s : t$。よって，$bs = (-a)t$ より，$ta + sb = 0$。以上より，$V = ta^2 + sb^2$。これは，前問より，$\mathrm{AO} \times \mathrm{OB}$ に等しい。

図1



(3) 図 2 のように，P から直線 AB に下ろした垂線の足を P′ とする。AB と P の間の距離 PP′ を y と置くと，三平方の定理より，$\mathrm{AP}^2 = \mathrm{AP}'^2 + y^2$, $\mathrm{BP}^2 = \mathrm{BP}'^2 + y^2$, $\mathrm{OP}^2 = \mathrm{OP}'^2 + y^2$ なので，$V = t(\mathrm{AP}^2 + y^2) + s(\mathrm{BP}^2 + y^2) - (\mathrm{OP}'^2 + y^2) = t\mathrm{AP}'^2 + s\mathrm{BP}'^2 - \mathrm{OP}'^2 + (s+t-1)y^2 = t\mathrm{AP}'^2 + s\mathrm{BP}'^2 - \mathrm{OP}'^2$。これは，前問より，$\mathrm{AO} \times \mathrm{OB}$ に等しい。

図2