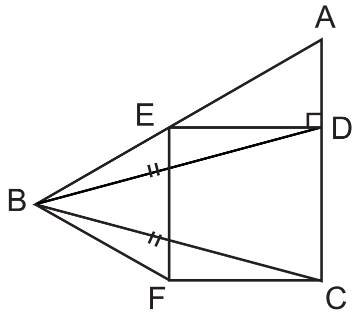
第3回 新潟県数学選手権 中学生大会 決勝問題 【解答例】

問題1 (20点)

(1) AとBの解答は，問3,4,6,7,8,10で一致し，問1,2,5,9で反対になっている。AはBより得点が40点高いが，一致しているところでは差がつかないので，反対になっている4問すべてでAは正解している。

(2) 前問より，問1は○，問2は×，問5は○，問9は○が正解となる。Cはこの4問中3問正解，1問不正解である。一方Cの得点は30点なので，この4問以外は全て不正解である。すなわち，問3は×，問4は○，問5は○，問6は×，問7は○，問8は×，問10は○が正解となる。以上よりDの得点を計算すると，得点は<u>70点</u>である。

問題2 (20点)



(1) △EBD に注目する。∠BED = ∠EAD + ∠ADE = 60° + 90° = 150°。また，△DBC は二等辺三角形なので，∠BDC = ∠BCD = 180 ° − (∠ABC + ∠BAC) = 180° − (45° + 60°) = 75°。ゆえに，∠BDE = 90° − 75° = 15°。よって，∠DBE = 180° − (∠BED + ∠BDE) = 180° − (150° + 15°) = 15°。以上より，底角が等しいので，△EBD は二等辺三角形である。すなわち EB = ED である。

(2) 点Fを四角形CDEFが長方形になるようにとる。△BDE と △BCF において，BD = BC, ED = FC, ∠BDE = 90° − ∠BDC = 90° − ∠BCD = ∠BCF = 15° より，二辺とそのはさむ角がそれぞれ等しいので，△BDE と △BCF は合同である。よって，∠FBC = ∠EBD = 15°。ゆえに，∠EBF = 45° + 15° = 60°。さらに BE = BF なので，△BEF が正三角形であることがわかる。よって EB = EF = DC。

問題3 (20点) 棒が8区間に収まることがあるから長さは8cm以下である。そして9区間にまたがることがあるので，長さは7cmより大きい。

棒の長さを $7 + x$ cm ($0 < x \leqq 1$) とする。棒の左端と定規の左端を合わせて，定規をゆっくり，たとえば秒速1 cmで左向きにすべらせて1 cm進ませてみよう。すると，はじめの $1 - x$ 秒の間，棒は8区間に収まっているが，最後の x 秒は9区間にまたがっている。

このことから，無作為に定規をあてたときに

$$(8\text{区間またがりのチャンス}) : (9\text{区間またがりのチャンス}) = (1 - x) : x$$

となる。実験によればこの比が 32 : 68 であった。ゆえに，$\dfrac{1-x}{x} = \dfrac{32}{68}$。これを x について解くと，$x = 0.68$。よって，棒の長さは7.68cmである可能性が最も高いと考えられる。四捨五入することにより，答えは<u>7.7cm</u>である。

問題 4　(20 点)

(1)

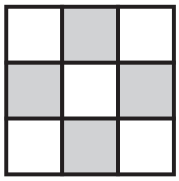


図 1

(2) 図 2 のように 5×5 の正方形を 8 個の 3×1, 1×3 の長方形と 1 つの 1×1 の正方形に分割する。各 3×1, 1×3 の長方形の中は少なくとも 1 つは黒く塗らなければならない。よって，黒く塗る方眼の数は 8 個以上である。また，図 3 のように条件を満たす塗り方が 8 個で存在するので，これが答えである。(図 4 は別解。)

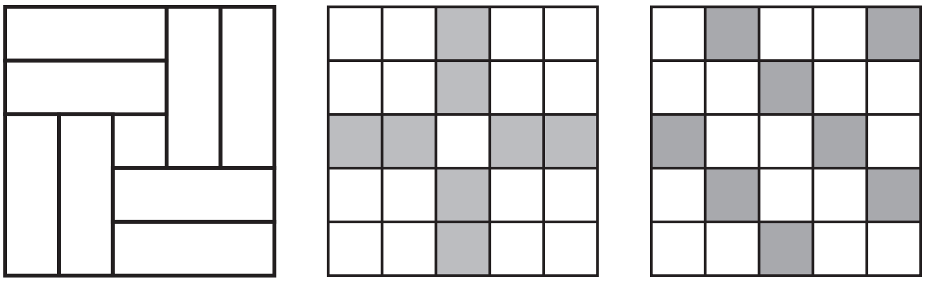


図 2　　図 3　　図 4

問題 5　(20 点)

(1) 図 1 のように一辺が 1m の方眼紙上で，正方形 ABCD を X が辺に当たるごとに，その辺を軸にひっくり返し，X の軌跡を記録すると，これは直線になる。また，方眼紙の各頂点に元の正方形の頂点と同じ名前 A，B，C，D を書く。このとき，点 A を出発し 3 度跳ね返って点 B に至る X の軌跡は，この方眼上で 3 度線分を貫通する A と B を結ぶ直線に対応する。図 1 より AB:BP=3:2。よって $\underline{\mathrm{BP} = \frac{2}{3}\ \mathrm{m}}$。

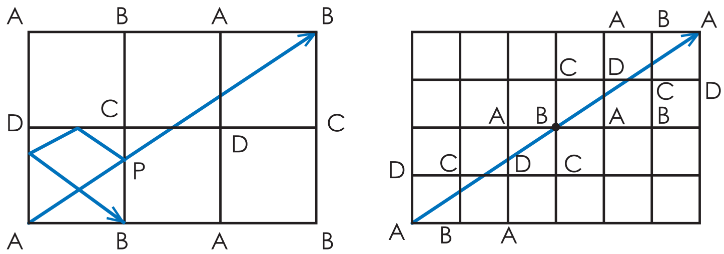


図 1　　図 2

(2) X が A を出発して A に戻ったと仮定する。正方形を (1) と同様に各辺でひっくり返しながら，頂点 A，B，C，D を方眼紙上に書くと，例えば図 2 のようになる。このとき，A が書かれる頂点は，必ず，出発点から横方向に偶数 m，縦方向に偶数 m 進んだ位置にあり，軌跡は偶数 m × 偶数 m の長方形の対角線であることがわかる。したがって，この長方形の中心は方眼の頂点であり，軌跡はこの中心を通るので，X が頂点で停止するという条件と矛盾する。以上より，A から出た X は A に戻らないといえる。

(3) まず，一辺が 1m の方眼紙上に正六面体を正方形 ABCD を下にして置く。図 3 のように正六面体を X が辺に当たるごとに，その辺を軸に転がして X の軌跡を記録すると，これは直線になる。また，方眼紙の各頂点に，上に乗った正六面体の頂点の名前を記録する。このとき，6 面を貫通する A と B を結ぶ X の軌跡は，方眼紙上では，図 3 のような 5m×2m の長方形の対角線であり，AB:BP=5:2。よって $\underline{\mathrm{BP} = 40\ \mathrm{cm}}$。

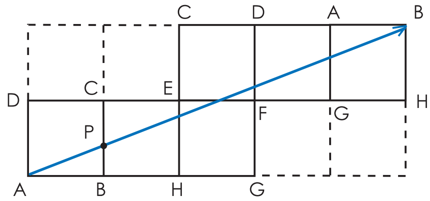


図 3

(4) X が A を出発して A に戻ったと仮定する。(3) と同様にそれを方眼紙上に記録を取ると，X の軌跡は，長方形の方眼の頂点を通らない対角線である。

さて，図 4 のように頂点 A, C, F, H に赤色をつけると，方眼紙上では，出発点から数えて，横方向と縦方向の移動距離の和が偶数 m である位置に赤色が付く (図 5)。よって，対角線の両端は A なので，先の長方形の横の長さと縦の長さの和は偶数 m である。

ここで，横の長さと縦の長さが共に偶数 m なら，長方形の中心が方眼の頂点となり，X が頂点を通らないことに矛盾する。よって，横の長さと縦の長さは共に奇数 m でなければならない。したがって，対角線は長方形の中央にある方眼の中心を通過する。

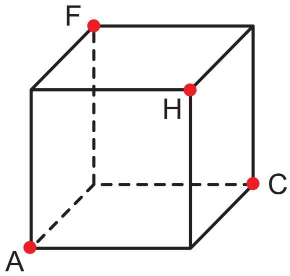


図 4

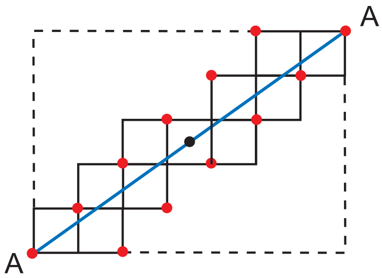


図 5

次に，この正六面体を頂点 A が南極点，頂点 E が北極点である「角ばった地球」だと思おう。そして，6 つの正方形の「地表」の中心に，北向きの小さな矢印を書く (図 6)。更に，方眼紙上で出発点の A から終点の A に向かって，地表の矢印を各方眼に転写する。また同時に，終点の A から出発点の A に向かって，地表の矢印を転写する。さて，「出発点の A を含む方眼上の矢印」と「終点の A を含む方眼上の矢印」は，長方形の中心に対して点対称である。そして，対角線も点対称に各辺と交わるので，正六面体の転がり方も点対称である。従って，矢印は点対称に分布するはずである (図 7)。ところが，中央にある方眼の矢印は，どちらを向いても，点対称にならない。

以上より，A から始まって A に戻る頂点を通過しない軌跡は存在しない。

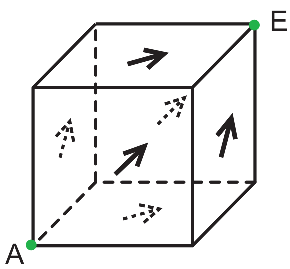


図 6

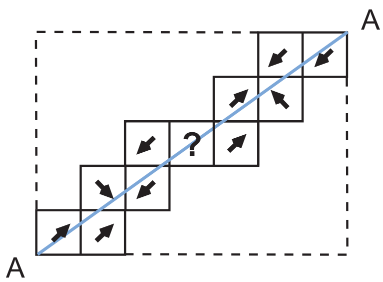


図 7