第 4 回 新潟県数学選手権 中学生大会 解答例

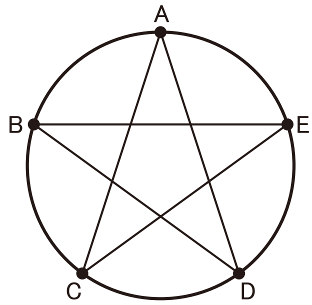
問題 1 (20 点)

(1) 頂角 A は，弧 CD に対する円周角である。一方，弧 CD は，円周の $\dfrac{1}{5}$ であるので、

$$\angle A = 360^\circ \times \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{180^\circ}{5}.$$

よって全ての頂角の和は,

$$\angle A \times 5 = \frac{180^\circ}{5} \times 5 = \underline{180^\circ}.$$

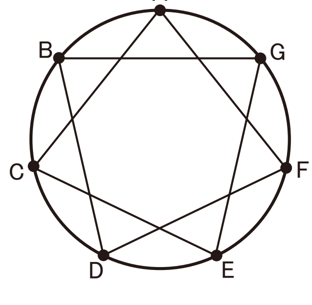


(2) 頂角 A は，弧 CDEF に対する円周角である。一方，弧 CDEF は,円周の $\dfrac{3}{7}$ であるので、

$$\angle A = 360^\circ \times \frac{3}{7} \times \frac{1}{2} = 180^\circ \times \frac{3}{7}.$$

よって全ての頂角の和は,

$$\angle A \times 7 = 180^\circ \times \frac{3}{7} \times 7 = \underline{540^\circ}.$$



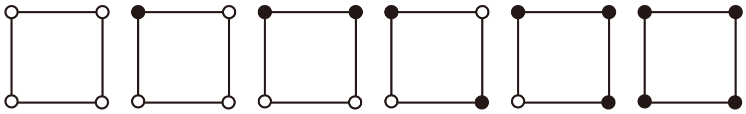
問題 2 (20 点)

(1) 問題の 2 桁の整数を n とし，これが AB と表されていたとすると，ABAB で表される整数は $101n$ である。よって示せた。

(2) 問題の 2 桁の整数を n とし，これが AB と表されていたとすると，ABABAB で表される整数は $10101n$ である。一方，10101 は 7 で割り切れる (商は 1443) ので，$10101n$ も 7 で割り切れる。

問題 3 (20 点)

(1) (i) 次の <u>6 通り</u> である。



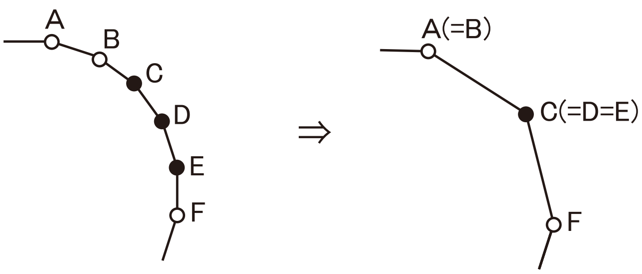
（ア）　（イ）　（ウ）　（エ）　（オ）　（カ）

(ii) 次がそれぞれの場合の両端の色が異なる辺の数である。

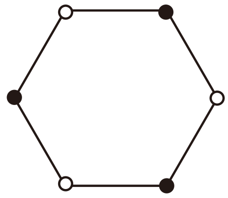
(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)	(カ)
0	2	2	4	2	0

いずれの場合も偶数個である。

(2) 両端が同色である辺を 1 点につぶして多角形を作る。次はその例である。



このとき，各頂点に交互に白と黒が置かれた多角形ができる。次がその例である。

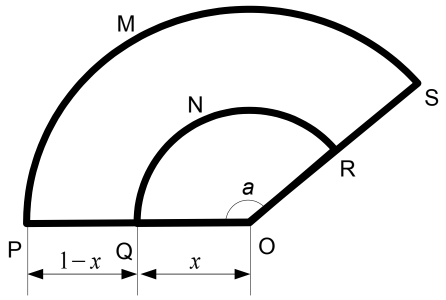


ここで，各黒の頂点には 2 本の辺がつながり，また全ての辺はいずれかの黒の頂点につながっている。よって，

$$辺の数 = 黒の頂点の数 \times 2 = 偶数$$

である。よって，元の図形で両端の色が異なる辺の数は偶数になる。

問題 4 (20 点)



経路 A, B, C の道のりを A, B, C と表すと

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \times \frac{a}{360} \\ &= \frac{\pi a}{180}, \\ B &= 1 - x + 2\pi \times \frac{a}{360} \times x + 1 - x \\ &= 2 - 2x + \frac{\pi a x}{180}, \\ C &= 2. \end{aligned}$$

である。

(1) 与えられた条件から，

$$\frac{\pi a}{180} : \left(2 - 2x + \frac{\pi a x}{180}\right) : 2 = 1 : 2 : 4.$$

なので，

$$\frac{\pi a}{180} = \frac{1}{2}, \quad 2 - 2x + \frac{\pi a x}{180} = 1.$$

となる。これを解くと，

$$\underline{a = \frac{90}{\pi}}, \ \underline{x = \frac{2}{3}}.$$

(2) $B \leqq A$ は，$2-2x+\dfrac{\pi a x}{180} \leqq \dfrac{\pi a}{180}$ と書ける。これを整理すると $(1-x)\left(\dfrac{\pi a}{180}-2\right) \geqq 0$。ここで，$1-x>0$ なので，
$\dfrac{\pi a}{180}-2 \geqq 0 \cdots (*)$ 。

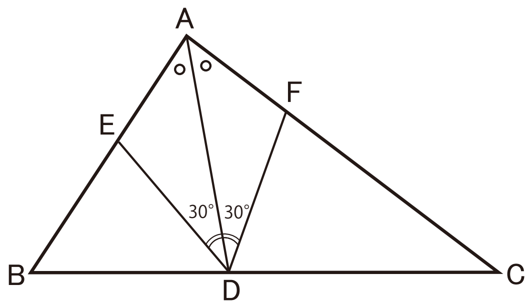
また，$B \leqq C$ は，$2-2x+\dfrac{\pi a x}{180} \leqq 2$ と書ける。これを整理すると，$x\left(2-\dfrac{\pi a}{180}\right) \geqq 0$。ここで，$x>0$ なので，$2-\dfrac{\pi a}{180} \geqq 0 \cdots (**)$ である。

さて，$(*)$ と $(**)$ より，$2-\dfrac{\pi a}{180}=0$ である。a について整理すれば，

$$\underline{a=\frac{360}{\pi}}$$

である。

問題 5 (20 点)



与えられた三角形を ABC とする。$\angle \mathrm{A} \geqq \angle \mathrm{B} \geqq \angle \mathrm{C}$ としてよい。このとき，$\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{B}+\angle \mathrm{C}=180^\circ$ であることから $\angle \mathrm{A} \geqq 60^\circ$ である。

さて，$\angle \mathrm{A}$ の 2 等分線と BC の交点を D とすると，

$$\begin{aligned}\angle \mathrm{ADB} &= \frac{1}{2}\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{C} > \frac{1}{2}\angle \mathrm{A} \geqq 30^\circ, \\ \angle \mathrm{ADC} &= \frac{1}{2}\angle \mathrm{A}+\angle \mathrm{B} > \frac{1}{2}\angle \mathrm{A} \geqq 30^\circ\end{aligned}$$

である。よって，線分 AB 上に E，線分 AC 上に F を $\angle \mathrm{ADE}=\angle \mathrm{ADF}=30^\circ$ になるように取れる。このとき，$\triangle \mathrm{ADE}$ と $\triangle \mathrm{ADF}$ は一辺とその両端の角が等しいので合同。よって以上のようにすれば，$\triangle \mathrm{EDF}$ は頂角が 60° の 2 等辺三角形すなわち正三角形になる。