第12回 新潟県数学選手権 中学生大会(個人) 解答例

問題1 (25点)

(1) 例として，$n!$ があげられる。

(2) 例として，$n!+1$ があげられる。なぜなら，これは2以上 n 以下の自然数で割ると余りが1であるから。

(3) $m=(n+1)!+1$ とすれば，$1 \leqq k \leqq n$ に対して，$x=m+k$ は素数でない。

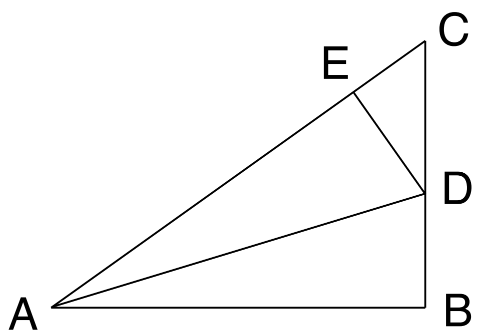
なぜなら，$(n+1)!$ は $k+1$ で割り切れるので，$x=(n+1)!+k+1$ も $k+1$ で割り切れる。一方，$2 \leqq k+1 < x$ なので x は素数でない。

問題 2 (25 点)　D から AC に下ろした垂線の交点を E とし，$\triangle \mathrm{ABD} = S,\ \triangle \mathrm{DEC} = T$ と置く。

$\triangle \mathrm{ABD}$ と $\triangle \mathrm{AED}$ は，直角三角形で，斜辺を共有していて，一つの鋭角が等しいので，合同であり，$\mathrm{ED} = \mathrm{BD} = 1,\ \triangle \mathrm{ADC} = S + T$ である。

直角三角形 $\triangle \mathrm{ABC}$ と $\triangle \mathrm{DEC}$ は，一つの角を共有しているので，各辺の比は等しい (相似である)。$\mathrm{AB} : \mathrm{DE} = 3 : 1$ より $\triangle \mathrm{ABC} : \triangle \mathrm{DEC} = 9 : 1$。よって，$(2S+T) : T = 9 : 1$ 。よって，$9T = 2S+T$。よって，$T = \dfrac{1}{4}S$ 。ゆえに，$S + T = S + \dfrac{1}{4}S = \dfrac{5}{4}S$ である。

よって，求める値は，$\dfrac{5}{4}$ である。



問題 3 (25 点)

(1) P から移動したい周上の点を Q とする。まず，Q が P を端とする正方形の辺の上にあるとするときは，図 1 のように正方形の内部に $\mathrm{PR} = \mathrm{QR} = 1$ となる点 R を取り，いったん R までジャンプし，更に Q へジャンプすればよい。

Q が正方形の他の辺上にあるときは，P はいったん正方形の他の頂点まで移動してから，同様なジャンプをすればよい。

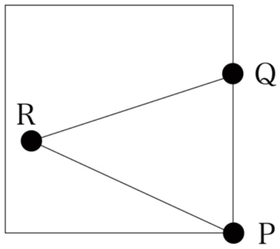


図1

(2) 図 2 のように，正方形の 4 つの頂点を中心として半径 1 の円を書き，4 つの円の共通部分，すなわち周囲を含まない斜線の部分が到達不可能な点である。

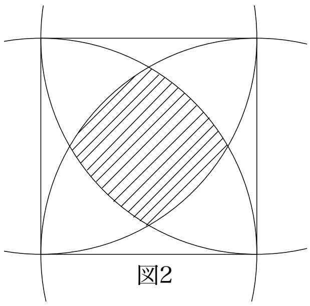


図2

【この領域に到達不可能である理由】

図 3 で考える。この領域の中の点 Q から最も遠い正方形内の点 P は，この正方形の 4 つの頂点のいずれかであるが，そこまでの距離は 1 より小さい。よって，この領域にジャンプできる点が，この正方形の中（と周）には存在しない。

【この領域の外ならば，到達可能である理由】

図 4 で考える。この領域の外の点 Q は，前述の 4 つの円のうち，少なくとも一つの円の外部か周上に入っている。その円の中心を P とすると PQ は 1 以上である。また，P を端とする正方形の辺上の点で，Q に最も近い点は，その辺への垂線とその辺の交点 H であり，QH は 1 以下である。よって，Q を中心とする半径 1 の円は，線分 PH と交わる。交点を R とすると，Q は R から到達可能である。前問の結果からカエルは R へは到達可能だから，Q へも到達可能である。

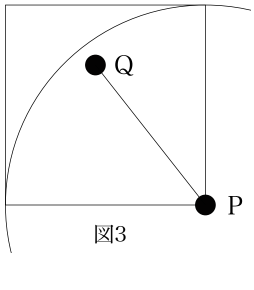


図3

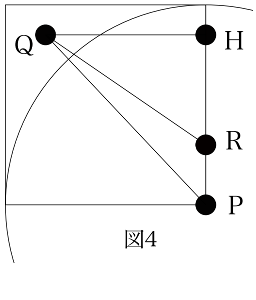


図4

問題 4 (25 点)

(1)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
a	b	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$	$3a+5b$	$5a+8b$	$8a+13b$	$13a+21b$	$21a+34b$	$34a+55b$	$55a+89b$

(2) 奇数 + 奇数 = 偶数, 奇数 + 偶数 = 奇数 に注意すると，フィボナッチ数列は次のようになる。奇数, 奇数, 偶数, 奇数, 奇数, 偶数, $\cdots$ これらは周期的に繰り返されるので，フィボナッチ数列の 3 の倍数番目は偶数である。

(3) フィボナッチ数列の n 番目と $n+1$ 番目を x と y とすると，フィボナッチ数列の $n+2$ 番目，$n+3$ 番目，$n+4$ 番目は，$x+y$, $x+2y$, $2x+3y$ である。

よって，フィボナッチ数列の n 番目 x が 3 の倍数なら，$n+4$ 番目の $2x+3y$ も 3 の倍数になる。

ところで，フィボナッチ数列の 4 番目は 3 なので，フィボナッチ数列の $4+4$ 番目は 3 の倍数，フィボナッチ数列の $4+4+4$ 番目も 3 の倍数，以下同様にフィボナッチ数列の 4 の倍数番目は 3 の倍数である。

(4) フィボナッチ数列の $n-1$ 番目と n 番目を w と x とする。$(*)$ より次が言える。

> $(**)$ $k \geqq 0$，フィボナッチ数列の k 番目と $k+1$ 番目を a と b とする。フィボナッチ数列の $k+n$ 番目を a' とすると，a' は a と b から始まるフィボナッチ数列の n 番目なので，$a' = wa + xb$ である。

さて，フィボナッチ数列の $n+1$ 番目を y，$n+n$ 番目のフィボナッチ数を x' とする。$(**)$ において $k = n$ とすれば，$a = x$, $b = y$, $a' = x'$ なので，$x' = wx + xy$ と書ける。したがって，x' は x で割り切れる。

更に，フィボナッチ数列の $n+n+1$ 番目を y'，$n+n+n$ 番目を x'' とする。$(**)$ において，$k = n+n$ とすれば，$a = x'$, $b = y'$, $a' = x''$ なので，$x'' = wx' + xy'$ と書ける。x' が x で割り切れることは既に示されているので，これも x で割り切れる。

以下，x''', x'''', $\cdots$ と同様であるから，題意は示された。